

# 《數學奠基活動模組示例：一元一次方程式\_國中七年級》

## 數學魔術名稱：數字神蹟

設計者：台北市興雅國中 林壽福老師、吳如皓老師

### 壹、活動器材：

- 一、學習單(每人1份)。
- 二、學習回饋單(每人1張)。
- 三、打火機1支、不銹鋼碗1個、A<sub>4</sub>白紙1張(教師表演用)。

### 貳、活動說明：

#### 一、單元主題說明：

- (一)透過魔術活動，發展「符號表徵」之先備具體心像，以利「一元一次方程式」之學習。
- (二)活動適於「代數式化簡」正式課程之啟蒙。
- (三)適用年級：(國中七年級以上)。

#### 二、活動目標與核心概念：

- (一)能使用符號將口語(或文字)敘述轉換成算式或代數式。
- (二)能進行代數式化簡操作。
- (三)核心概念：發展將文字表達轉化成代數表達能力，同時培養邏輯與逆變換思維能力。

### 參、活動流程：

#### 一、魔術活動：(老師找一名同學當觀眾，示範魔術並串聯提問，其他學生觀察聆聽)

- (一)請一位觀眾上台，隨意在50到100間挑一個最喜歡的數字。例如：觀眾挑86。
- (二)魔術師背對黑板或蒙住眼睛，不看整個計算過程。
- (三)請觀眾將這個數加上59，之後把計算所得的和將其百位數字去掉。
- (四)再將去掉的百位數字拿回來，與剩下的兩位數相加起來。
- (五)接著用原數減去前面得數之和。
- (六)最後請該觀眾將運算結果寫在一張A<sub>4</sub>的白紙上，然後將白紙捲起來，不要讓魔術師看到。
- (七)舉例來說，這位觀眾原先挑86，則其運算步驟如右：
- (八)請該觀眾將捲起來的紙交給魔術師。(魔術師故作神秘狀)

$$\begin{array}{r}
 86 \quad \text{原數} \\
 +59 \quad \text{加 59} \\
 \hline
 145 \quad \text{去掉百位數字} \\
 45 \quad \text{將去掉的數字再加回來} \\
 +1 \\
 \hline
 46 \\
 86 \quad \text{以原數減去上面的和} \\
 -46 \\
 \hline
 40 \quad \text{結果是 40}
 \end{array}$$

(九)接著以打火機將紙點燃，並放入預備的容器中燒掉。

(十)幾分鐘過後，等紙灰涼了，再將灰塗在先前寫字的手心等處。如魔法般，在手心等處會清晰地浮現 40。魔術成功！

學生們將會看得目瞪口呆！！！

**【表演小撇步】**：表演的戲劇性效果，在於老師未進教室之前，必須先以棉花棒沾洗碗精（或肥皂水）在手心、手臂、手背，甚至臉頰或眉心等多處寫上 40，這些字跡很快會乾掉，乾了之後什麼痕跡都看不到。

●關鍵提問與追問：（魔術表演完後，不直接進行破解，先鼓勵學生問問題）

1. 想一想！老師是如何辦到的？（這樣可以吊足學生胃口，引動他們的探索慾望。）
2. 答案永遠都是 40。用這個數具有特別的意義，因為它是「台灣之光」王建民的球衣號碼，能引起學生共鳴。
3. 假定學生不知道怎麼問問題，可以讓學生試著用具體數字例代入，做分段解析說明，參學習單布題。可以降低學習門檻，讓低成就學生更容易獲得學習成功的滿足感。連續代入幾個數試驗後，學生將發現結果都相同，教師接著可以逼問：「照這樣下去，總共需要試驗幾次呢？」
4. 追問：能否用更簡潔的方式得到答案？（當我們引入代數符號時，學生將體驗到它的多重威力：文字符號不僅可以代表很多數，也可以運用來玩一個驚奇的數學魔術。）
5. 接著，也可以讓學生設計一個不一樣的謎底數，例如 100。或者另一位「台灣之光」美國職棒大聯盟金鶯隊投手陳偉殷，他的球衣號碼 16 號；NBA 休士頓火箭隊華裔林書豪，球衣是 7 號。教師可以趁機帶領他們深入思考，要如何設計新的魔術程序？
6. 若學生對於這個魔術的原理說明學習有困難，可採逐步分解方式，先藉由學習單階梯式的鋪陳過程——從「猜數遊戲」入手——，則可以降低學習門檻，讓低成就學生更容易獲得學習成功的滿足感。

## 二、活動設計與原理說明

## ●活動設計

- (一) 本篇設計以一種近乎神蹟的魔法遊戲，將整個上課氣氛弄活起來，激發學生的學習動機，並且製造引入代表數符號的必要性和優越性，讓學生體會文字符號的威力。這個魔術具有非常震撼又驚奇的效果，會讓學生看得目瞪口呆！是引動學習動機的絕佳題材。設計者親身經歷，開學第一節課對七年級新生表演過後，隔兩天學生們在路上遠遠看見老師，就騷動起來並且歡呼：「大師來了！大師來了！」崇拜之情溢於言表！學生們會持續討論這個話題數週之久，並且迫切想知道到底老師是怎麼辦到的？（參引書 1）
- (二) 學習代數最困難的一部份是培養把問題轉化成代數形式的的能力，其中涉及的不僅是代數符號的操作技術，更與如何運用代數思維來進行思考有關。當然，不理解代數直接教授孩子操作技術是相當可能的，例如 Skemp 所說的機械性理解就是一例（參引書 2）。然而當漸漸運用代數來解決實際問題時，這類型的學習會讓孩子們覺得高高在上又枯燥無味。這就是為什麼這麼多孩子，甚至大人們都覺得掌握代數語言很難的原因之一。在中國數學史上鼎鼎大名的康熙皇帝，就在符號代數的學習過程中，表現了類似今日國中學生茫然不知所措的模樣，這個歷史經驗，實在很值得教學工作者參考與借鏡（洪萬生，參引書 3）。
- (三) 接著透過「猜數遊戲」來鞏固文字符號表達學習，以及符號與數字的合併或化簡，這不僅能啟發和維持學生的學習興趣，更讓學生了解文字符號的變數概念，同時也彰顯和延續了符號的威力，這和獲得代數表達感覺是一樣具有好處的。歷程中，設計者也企圖培養學生逆運算的邏輯思維，為後續學習解一元一次方程作好鋪路。

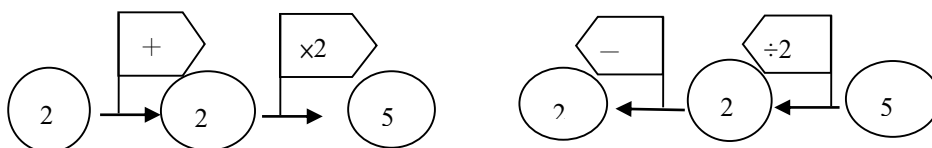
●原理說明

(一)答案永遠都是 40。假設觀眾原先挑定的數為  $x$ ，則整個化簡與運算過程如下： $x - [(x + 59) - 100 + 1] = 40$ 。也可以藉由表格，代入具體數字，解析說明，讓學生感受到符號的威力。

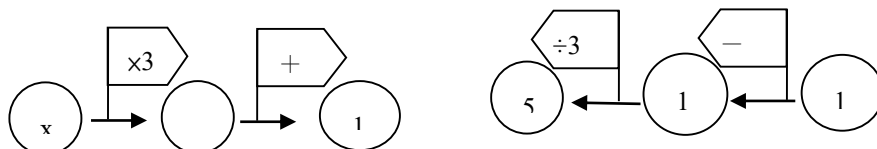
(二)總共需要試驗  $100 + 50 + 1 = 51$ (次)。

(三)學習單參考解答：

1.  $(x + 3) \times 2 - 6 = 2x$ 。所以只要將同伴給的答案除以 2，就會知道他原先想的數。師生討論時，反應快的學生可能會要求代入不同的數，例如：0.02、-3、0 等，教師可以把握機會讓學生更認識文字符號的功能與威力，千萬別輕輕帶過喔！
2.  $3x + 4 - 2x = x + 4$ 。所以只要將同伴給的答案減 4 即可。
3. 參上兩題原理說明。若學生理解有困難，可以透過逆運算原理來說明。例如同學想的數是 23，參底下說明所使用之旗幟圖表法。Perso (1996) 認為學生若能使用還原法 (undoing operations) [類似旗幟圖表法]，可以熟悉結構的起點與逆運算的概念 (未來，進而可與移項法則進行比較)，則能避免迷思概念的發生。此外，Bernard (1988) 等人認為使用還原法有一個重要意義：學生能將所學過的知識——四則運算、逆運算——用到解方程式的新問題情境中，如此可以訓練學生逆向思考及分析的解題能力，更能訓練學生連結新舊知識的能力。(參引書 4)



4. 延伸題第 2 題： $(x - 2) \times 3 + 7 = 3x + 1 \rightarrow 3x + 1 = 16 \rightarrow x = 5$ 。此題需要的解題能力更高了，學生同時體驗到猜數遊戲的原理，以及解方程式的過程，兩者關連緊密。這個活動帶有同時學習的教學原則，若學生學習狀況許可，可再深入以培養學生的創造力及推理能力。讓學生兩人一組，互相設計題目和猜答案，如此更有機會讓學生創造出許多多項式，並同步學會求解一元一次方程式問題。因此，此題與延伸題教師可視實際狀況，不實施或併入未來一元一次方程式正式教學中。



肆、學習單：

發現「數字神蹟」的秘密

學會「數字神蹟」魔術後，只要再勤加練習，並且找機會勇敢『秀』一下，你就是一位小魔術師了。接下來的學習單，將考驗我們能否『智勇雙全』？用心想一想，用自己的話完成此學習單，你會是這個活動最完美的學習者。加油喔！

我的姓名是：
<p>(一) 請你的同伴想一個數。請他將此數加 3，再乘以 2，減去 6。當他告訴你所得到的答案時，你可以立刻猜出他開始所想的數，這會使他大吃一驚！〔提示：把他的答案除以 2，試試看！〕？</p>
<p>(二) 請你的同伴想一個數。請他將此數乘以 3，再加 4，減去 2 倍的原數。當他告訴你所得到的答案時，你可以立刻猜出他開始所想的數，這會讓他很驚奇！〔提示：把他的答案減 4。試試看！〕</p>
<p>(三) 請你解釋一下為什麼上兩個算式，都能輕易猜出對方心中想的數？</p>

(四) 隨意選在 50 到 100 間挑一個最喜歡的數字，請將這個數加上 59，把計算所得的和之百位數字去掉，再將去掉的百位數字與剩下的兩位數相加起來，接著用原數減去前面得數之和。你得到什麼數？再用其他數字試試看。請完成下表。

原數	+59	去掉百位數字 (-100)	將去掉的數字再加回來 (+1)	以原數減去左欄的和 (列算式)	結果

(五) 承上題，照這樣下去，總共需要試驗幾次呢？有否更簡潔的方式來得到答案？

(六) 我發現這個活動的「秘密」還有……

答：

伍、學習回饋：

我們玩過「數字神蹟」魔術，度過了快樂的時光，現在請你用心想一想，「數字神蹟」帶給你(妳)的感覺是什麼呢？你(妳)學了些什麼？請用自己的話寫下來。

<p>(一)我的感覺是：</p>
<p>(二)我覺得最有趣的是：</p>
<p>(三)我還想要知道的是：</p>
<p>我的名字是：( )</p>

103 年( )月( )日

### 陸、延伸活動(猜數遊戲與創作)

1. 仿魔術方法，請你設計另一位「台灣之光」美國職棒大聯盟金鶯隊投手陳偉殷，他的球衣號碼 16 號。並列式和作運算說明。
2. 告訴你的同伴：「我現在想了一個數，請你把它設為  $X$ ，寫在紙上。」我把它減 2，再乘以 3，再加 7，請你的同伴把你的代數式化簡好（約等候 5~10 秒鐘），告訴他你現在的數是 16。請你的同伴把你原來所想的數，寫在紙上，並且和你核對答案。（試試看！請嘗試利用具逆運算（加減和乘除互逆原理）精神的旗幟圖表（下節介紹）解題。）
3. 兩人一組，互相設計題目，猜答案。試著創造出更多的代數式，進而和戲法步驟連結，並練習解一元一次方程式（猜答案動作）。（此題需要的能力更高，教師可以視學生程度，彈性選擇教或不教。）

### 柒、參考文獻

- 1、林壽福·吳如皓 著（2009 年）**數學魔術——27 個數學概念奇蹟**。台北市：尖端出版社。
- 2、Richard R. Skemp 著，陳澤民 譯（1995）**數學學習心理學**。台北市：九章出版社。
- 3、洪萬生著，**康熙皇帝與符號代數**。台北市：HPM 第二卷第一期。
- 4、謝孟珊（2000）**以不同符號表徵未知數對國二學生解方程式表現之探討**。國立臺北師範學院數理教育研究所碩士論文。