

《數學奠基活動模組：二元一次方程式_國中七年級》

數學魔術名稱：你排我猜

設計者：台北市興雅國中 林壽福老師、吳如皓老師

壹、活動器材：

- 一、撲克牌每組 4 人給兩副。
- 二、預言紙(每組 4 套，每套 3 張)。
- 三、學習單(每組 4 張)。
- 四、學習回饋單(每組 4 張)。

貳、活動說明：

一、單元主題說明：

- (一)透過撲克牌操作，探究色牌數量變化規律(pattern)，發展「符號表徵」之先備具體心像，以利「二元一次聯立方程式求解」之學習。
- (二)活動適於「二元一次方程式」正式課程之前。
- (三)適用年級：(國中七年級以上)。

二、活動目標與核心概念：

- (一)給定紅色 5 張、黑色 5 張牌，任意排成兩列，解決「兩列中紅色牌和黑色牌的張數差」問題。
- (二)核心概念：發展二元一次式的操作性代數(符號)表徵心像。

貳、活動流程：

一、魔術活動：(老師找一名同學當觀眾，示範魔術並串聯提問，其他學生觀察聆聽)

- (一)拿出一副撲克牌，展開給觀眾檢查，是一副正常牌。
- (二)隨意分兩堆彈洗後，由觀眾從 10~20 任選一個喜歡的張數，例如 14。
- (三)若觀眾選擇的是奇數張，問觀眾還要不要加牌？(秘訣：藉機看到觀眾所挑下一張牌顏色)
- (四)接著由觀眾洗牌或弄亂。
- (五)撲克牌面朝下，排成兩列，例如長列有 8 張、短列有 6 張。
- (六)寫下預言「長列中的紅色牌會比短列中的黑色牌多出 1 張」。
- (七)翻開牌，數一數長列中的紅色牌有幾張，短列中的黑色牌有幾張，長紅比短黑多幾張？
跟預言一樣嗎？如果是，恭喜您，魔術成功！！！！

- 關鍵提問與追問：(魔術表演完後，不直接進行破解，先鼓勵學生問問題)
 1. 若預言要成真，你覺得需要掌握哪些訊息？
 2. 看著老師桌面上的牌，說說看你發現什麼？
 3. 排成上下列後，隨意調換幾張牌，兩列中紅牌、黑牌的數量差會保持不變嗎？(提示)
- 老師再將魔術程序，從頭至尾說明一遍。讓學生再進行思考。
- 請學生回座位，拿出紅色、黑色牌各 5 張，並將這 10 張牌洗亂，再隨意排成兩列(長短可相等或不相等)。你能否做出準確預言？分組討論。
即預言：「等長兩列」或「長列比短列」中紅色牌會比黑色牌多出幾張。
- 若學生不知道如何著手解決問題，可給予適當提示引導，或建議循著學習單的問題做思考。
- 【學習單、延伸題提問引導參考】
 1. 學習單 (可以：自問自答或向他人提問)
 - (1) 我 (你) 發現什麼？
 - (2) 我 (你) 是怎麼想的？
 - (3) 關鍵是什麼 (答案或想法中哪步最重要)？
 - (4) 怎麼確認我 (你) 的想法是對的 (證據在哪裡)？
 - (5) 答案可以進一步簡化嗎？
 2. 延伸題第 1 題全體總動員 (可以：自問自答或向他人提問)
 - (1) 我 (你) 怎麼得到 $\frac{x}{2}$ 的？說明我 (你) 的想法。
 - (2) 怎麼確認我 (你) 的想法是對的 (證據在哪裡)？
 - (3) 這解法可否類推於下一題？
 - (4) 除了結果能用 $\frac{x}{2}$ 表示，還有其他的表達方式嗎？
 3. 延伸題第 2 題色牌數不等 (可以：自問自答或向他人提問)
 - (1) 色牌數量不等，例如紅色牌 6 張、黑色牌 5 張，還能玩這個魔術嗎？(What if not)
 - (2) 解答中 $\frac{x+1}{2}$ ，其中的 1 代表什麼？
 - (3) 若改問：A 堆的黑牌數會比 B 堆的紅牌數多幾張？我 (你) 怎麼說？(答： $\frac{x-1}{2}$ 張)
 - (4) 繼續增加紅牌的數量，這個式子還成立嗎？或者需要做怎樣的調整？
 - (5) 還有其他的表達方式嗎？
 4. 延伸題第 3 題隨機動員 (可以：自問自答或向他人提問)
 - (1) 使用代數式來表達我 (你) 的發現。
 - (2) 上題解法，在這裡還適用嗎 (能否類推)？
 - (3) 對於結果，我 (你) 還有其他表達方式嗎？
 - (4) 哪個表徵較好、較快，能切合更廣的問題或方便魔術表演？
 - (5) 還能使用更少的資訊來玩這個魔術嗎？

二、活動設計與原理說明

●活動設計

- (一) 關鍵處在於掌握到「不變性」。只要知道紅、黑牌的數量，則排成上下列後不管調換幾張，兩列中紅牌、黑牌的數量差保持不變。
- (二) 變數使數學表徵符號作為一種思考工具成為可能。Usiskin(1988)確認變數三種用法：(1)作為特定的未知數；(2)作為規律的一般化使用；(3)在共變量中的一個變量(參考書目1)。本設計即是在培養學生上面第(2)項能力，即能使用符號來表徵一般化的規則，提升其數學學習力。
- (三) 讓學生分享想法與不同的解題路徑。要求說明與解釋(或論述)。
- (四) 從特殊例(極端例)到一般例的思維過程體驗，並引導學生在動態變化中看到數學結構，及其代數式表徵的對稱之美。
- (五) 一般化路徑可透由底下幾個方式得到關係：
1. 操作具體物(撲克牌)
 2. 圖表
 3. 解聯立方程式
- (六) 學生採用越多的方法思考和測試新概念，新概念就越容易正確形成，並和其他豐富的概念關係相融合統一。

●原理說明

(一)紅黑牌數量相等(例如：各5張)

1. 以極端例來觀察，可以很快發現規律。

(1)當排成等長時，則兩列中的紅牌和黑牌數量相等，且上下列不管再調整幾張，兩色的數量差保持不變(關鍵)。

R	R	R	R	R
B	B	B	B	B

(2)當排成不等長時，例如兩列中數量相差2張，則長列中的紅牌比短列中的黑牌多1張，且上下列不管再調整幾張，長列中的紅牌仍比短列中的黑牌多1張，兩顏色的數量差保持不變(關鍵)。

R	R	R	R	R	B
B	B	B	B		

(3)當排成不等長時，例如兩列中數量相差4張，則長列中的紅牌比短列中的黑牌多2張，且上下列不管再調整幾張，長列中的紅牌仍比短列中的黑牌多1張，兩顏色的數量差保持不變(關鍵)。

R	R	R	R	R	B	B
B	B	B				

2. 學生可能發現的規律有：

- (1)長列減短列差的一半；
- (2)紅色牌張數-短列排張數；
- (3)長列排張數-黑色牌張數。

若以延伸題第 3 題符號表達，假設拿出 X 張紅牌、Y 張黑牌，把牌分成兩堆，多的那堆有 a 張、少的那堆有 b 張，則答案可為：

(1) $\frac{(a-b)+(X-Y)}{2}$; (2) X-b ; (3) (a-Y)。

(二)延伸題參考解答：

1.全體總動員

由上題得到的規律可知，當排成不等長時，A 堆比 B 堆多 x 張，則長列中的紅牌比短列中的黑牌多 $x/2$ 張，且上下列不管再調整幾張，長列中的紅牌仍比短列中的黑牌多 1 張，兩顏色的數量差保持不變（關鍵）。

2. 色牌數不等

延續前面解法，也以極端例來觀察

(1) 當排成 6 張紅牌和 5 張黑牌時，長列中的紅牌會比短列中的黑牌多 1 張，且上下列不管再調整幾張，兩顏色的數量差保持不變（關鍵）。

R	R	R	R	R	R
B	B	B	B	B	

(2) 當排成 7 張紅牌和 4 張黑牌時，長列中的紅牌會比短列中的黑牌多 2 張，且上下列不管再調整幾張，兩顏色的數量差保持不變（關鍵）。

R	R	R	R	R	R	B
B	B	B	B			

(3) 當排成 8 張紅牌和 3 張黑牌時，長列中的紅牌會比短列中的黑牌多 2 張，且上下列不管再調整幾張，兩顏色的數量差保持不變（關鍵）。

R	R	R	R	R	R	B	B
B	B	B					

.....

綜合之，假設 A 堆（長列）比 B 堆（短列）數量多 x 張時，則 A 堆的紅牌數會比 B 堆的黑牌數多 $\frac{x+1}{2}$ 張，其中的 1 代表原來紅牌與黑牌的數量差。（一旦知道 1 代表的意義，則可以做類推）

*也可以透過觀察法或圖表法得到答案為： $(a-Y)$ or $(X-b)$ or $\frac{(a-b)+(X-Y)}{2}$ 張。（使用學習單最後一題符號）

*若問 A 堆的黑牌數會比 B 堆的紅牌數多幾張？答案為： $\frac{x-1}{2}$ 張，其中的 1 代表原來紅牌與黑牌的數量差。使用學習單最後一題符號則為：

$(a-X)$ or $(Y-b)$ or $\frac{(a-b)-(X-Y)}{2}$ 張。

3. 隨機動員

〈解法一〉觀察法

可透過操作觀察，發現 pattern：

(1) A 堆的紅牌數會比 B 堆的黑牌數多 $(a-Y)$ or $(X-b)$ or $\frac{(a-b)+(X-Y)}{2}$ 張；(2) A 堆的黑牌數會比 B 堆的紅牌數多 $(a-X)$ or $(Y-b)$ or $\frac{(a-b)-(X-Y)}{2}$ 張。

〈解法二〉圖表法

根據題意，列表如右：

$$\therefore R_1 - B_2 = R_1 - [Y - (a - R_1)] = a - Y$$

$$\text{or } R_1 - B_2 = R_1 - [b - (X - R_1)] = X - b$$

\therefore A 堆的紅牌數會比 B 堆的黑牌數多 $(a-Y)$ or $(X-b)$ 張。

同理：

$$\therefore B_1 - R_2 = (a - R_1) - (X - R_1) = a - X$$

$$\text{or } B_1 - R_2 = (Y - B_2) - (b - B_2) = Y - b$$

\therefore A 堆的黑牌數會比 B 堆的紅牌數多 $(a-X)$ or $(Y-b)$ 張。

	紅牌	黑牌	總量
長列	R_1	B_1 or $(a - R_1)$ or $(Y - B_2)$	a
短列	R_2 or $(X - R_1)$ or $(b - B_2)$	B_2 or $Y - (a - R_1)$ or $b - (X - R_1)$	b
總量	X	Y	

〈解法三〉解聯立方程式法

$$R_1 + B_1 = a \dots \textcircled{1}$$

$$R_2 + B_2 = b \dots \textcircled{2}$$

$$R_1 + R_2 = X \dots \textcircled{3}$$

$$B_1 + B_2 = Y \dots \textcircled{4}$$

$$\text{由 } \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } (R_1 - B_2) + (B_1 - R_2) = a - b \dots \textcircled{5}$$

$$\text{由 } \textcircled{3} - \textcircled{4} \text{ 得 } (R_1 - B_2) + (R_2 - B_1) = X - Y \dots \textcircled{6}$$

$$\text{由 } \textcircled{5} + \textcircled{6} \text{ 得 } 2(R_1 - B_2) = (a - b) + (X - Y)$$

$$\text{故 } (R_1 - B_2) = \frac{(a - b) + (X - Y)}{2} ;$$

同理

$$\text{由 } \textcircled{5} - \textcircled{6} \text{ 得 } 2(B_1 - R_2) = (a - b) - (X - Y)$$

$$\text{故 } (B_1 - R_2) = \frac{(a - b) - (X - Y)}{2} .$$

但又 $\therefore a + b = X + Y$ ， $\therefore a - Y = X - b$ or $a - X = Y - b$

$$\text{故 } (R_1 - B_2) = \frac{(a - b) + (X - Y)}{2} = \frac{2(a - Y)}{2} \text{ or } \frac{2(X - b)}{2} , \text{ 也可以表為 } (a - Y) \text{ or } (X - b) ;$$

$$\text{而且 } (B_1 - R_2) = \frac{(a - b) - (X - Y)}{2} = \frac{2(a - X)}{2} \text{ or } \frac{2(Y - b)}{2} , \text{ 也可以表為 } (a - X) \text{ or } (Y - b) .$$

肆、學習單：

發現「你排我猜」的秘密

我們玩過「你排我猜」魔術後，只要再勤加練習，並且找機會勇敢地『秀』一下，你就是一位小魔術師了。接下來的學習單，將考驗我們能否『智勇雙全』？用心想一想，用自己的話完成此學習單，你會是這個活動最完美的學習者。加油喔！

我的姓名是：
(一) 拿出紅色、黑色牌各 5 張，並將 10 張牌隨意洗亂，任意排成上下兩列，上列中紅色牌會比下列中黑色牌的張數多幾張？
(二) 請用一句話(或一個式子)總結你在上面的發現？
(三) 怎麼確認你的想法是對的（證據或關鍵在哪裡）？
(四) 請用其他代數(以符號表徵)表達方式呈現你的結論(或答案)？
(五) 我發現這個活動的「秘密」還有…… 答：

伍、學習回饋：

我們玩過「你排我猜」魔術，度過了快樂的時光，現在請你用心想一想，「你排我猜」帶給你(妳)的感覺是什麼呢？你(妳)學了些什麼？請用自己的話寫下來。

(一)我的感覺是：

(二)我覺得最有趣的是：

(三)我還想要知道的是：

我的名字是：()

103 年()月()日

陸、延伸題

1.(全體總動員)

如果我們拿整副牌（52張，其中26張紅、26張黑）來玩，當把牌任意分成A、B兩堆，而A堆比B堆多 x 張，請你推論此時A堆的紅牌數會比B堆的黑牌數多幾張（或A堆的黑牌數會比B堆的紅牌數多幾張）？請說明你的推論。

2.(色牌數不等)

如果紅色、黑色牌數量不同，例如紅色牌6張、黑色牌5張，面朝下、洗亂，再隨意排成兩列（張數可相等或不相等），請你推論此時A堆的紅牌數會比B堆的黑牌數多幾張？請說明你的推論。

3.(隨機動員)

如果我們拿某些牌來玩（ X 張紅牌、 Y 張黑牌），當把牌分成A、B兩堆（多的那堆有 a 張、少的那堆有 b 張），請你推論此時A堆的紅牌數會比B堆的黑牌數多幾張（或A堆的黑牌數會比B堆的紅牌數多幾張）？請說明你的推論。

柒、參考書目

1. John A. Van De Walle 著，張英傑、周菊美合譯（2005年）中小學數學科教材教法，台北市：五南圖書出版公司。
2. 林壽福·吳如皓 著（2009年）**數學魔術——27個數學概念奇蹟**。台北市：尖端出版社。

捌、附件—預言紙(大班教學可分寫在珍珠板上，效果佳；小眾使用影印紙即可)

長列中的紅牌比
短列中的黑牌多
張。

長列中的黑牌比
短列中的紅牌多

張。

兩列中的紅牌和
黑牌數量

相等。