

單元一 圓的意義與位置關係

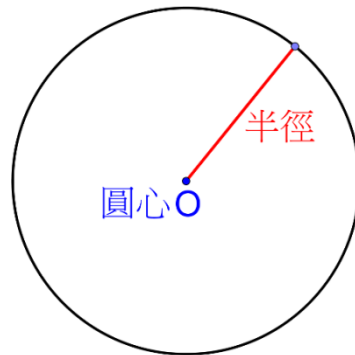
課文A： 圓與點、線、圓的位置關係

這章節要提到一些與圓相關的概念，並在例題中說明解幾何問題常用的三個策略，**標**：將數據標到圖形上；**看**：在整個圖形中，觀察出重要的局部圖形；**用**：根據找出的圖形，正確使用上相關幾何性質，例如在直角三角形中，使用畢氏定理。讓我們先複習一下圓的定義。

※圓的定義

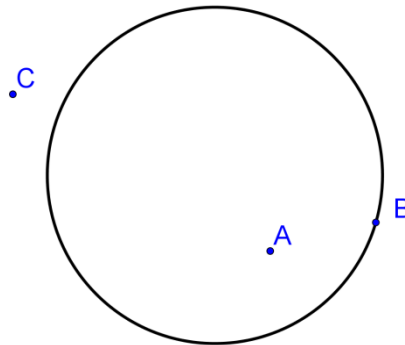
在二下的時候就提過圓的定義：「在平面上，與一個固定點距離相等的所有點，所形成的圖形就是圓」，而這個固定點就稱為圓心，這一段固定距離就稱為半徑。我們畫圓的工具—圓規也是利用這個定義來畫圓的。

在命名圓的時候通常會利用圓心來命名，例如某一圓的圓心是 O 點，那麼我們就稱它為圓 O 。

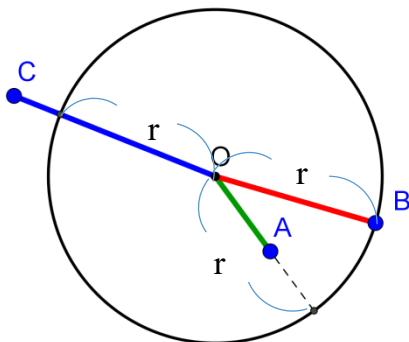


※圓與點的位置關係

一個圓將所在的平面分成圓內、圓上、圓外。如下圖，A 點在圓內、B 點在圓上、C 點在圓外。

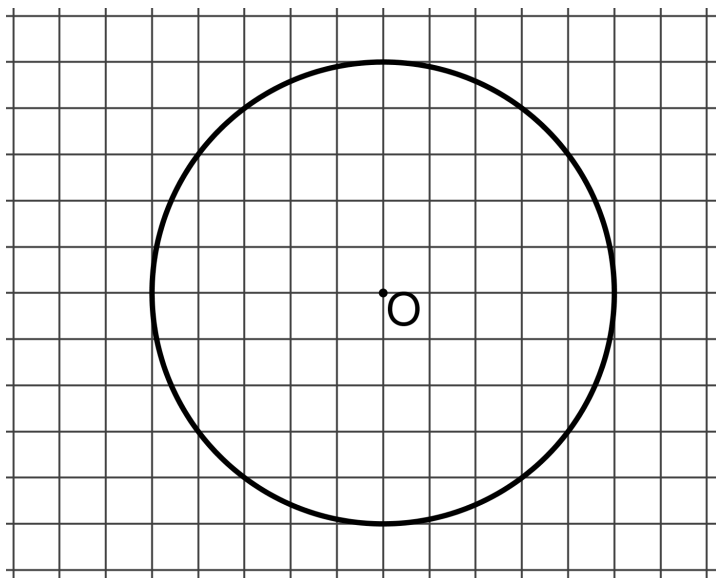


想想看，如何判斷點與圓的位置關係呢？可以由圓的兩個要素(圓心、半徑)來協助判斷，因為圓上的點到圓心的距離都剛好等於半徑，所以如果離圓心的距離比半徑大就會跑到圓外了，而離圓心的距離比半徑還要小就在圓內。還不是很懂的話可以掃掃看右邊的 QR-Code !



例題一：已知圓 O 的半徑為 5，若平面上 A 、 B 、 C 三點，與圓心 O 的距離分別為 4、5、6，則 A 、 B 、 C 三點與圓 O 之位置關係為何？

解一：可以試著將題目的圖畫出來。下面有一個半徑為 5 的圓 O ，請根據題目中的條件將 A 、 B 、 C 三點畫出來：



正確畫出來後就可以判斷它的位置了！

除此之外，也可以直接利用到圓心的距離與半徑做比較，然後判斷它的位置！

解二：

A 與圓心 O 的距離為 $4 \Rightarrow \overline{OA} = 4 < \text{半徑 } 5 \Rightarrow A$ 點在圓內。

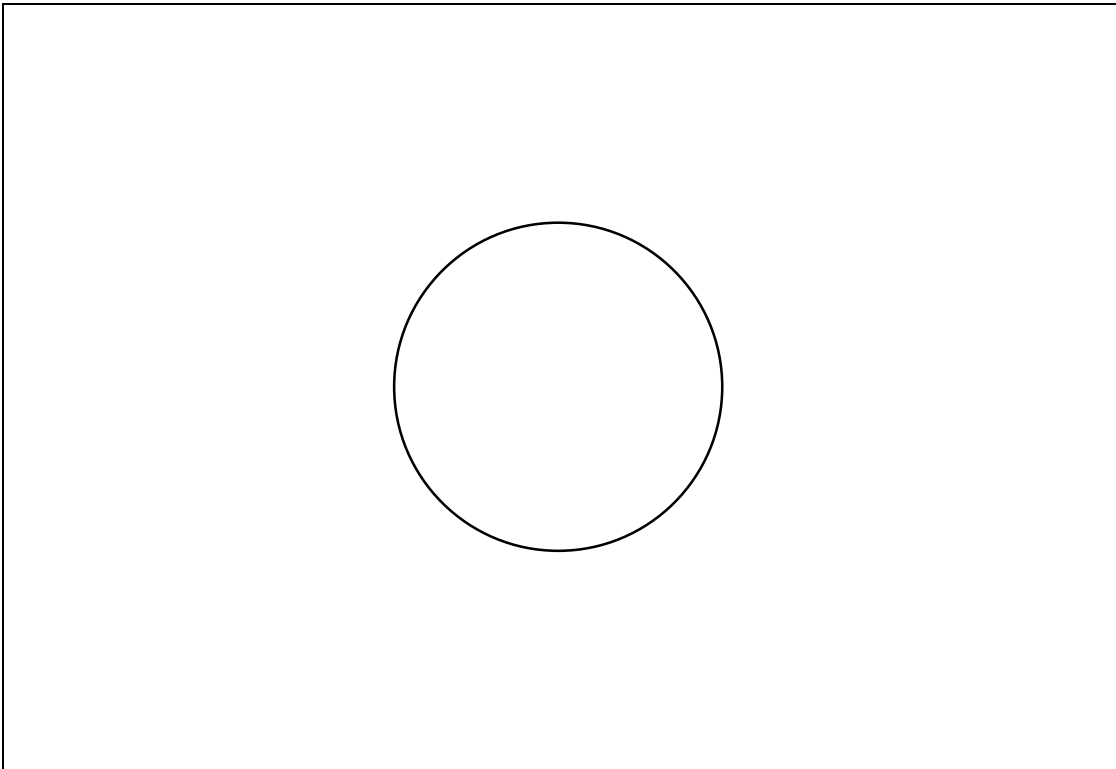
B 與圓心 O 的距離為 $5 \Rightarrow \overline{OB} = 5 = \text{半徑 } 5 \Rightarrow B$ 點在圓上。

C 與圓心 O 的距離為 $6 \Rightarrow \overline{OC} = 6 > \text{半徑 } 5 \Rightarrow C$ 點在圓外。

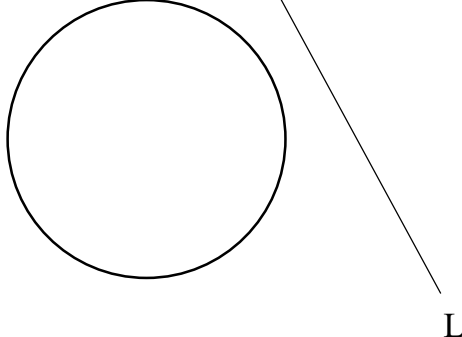
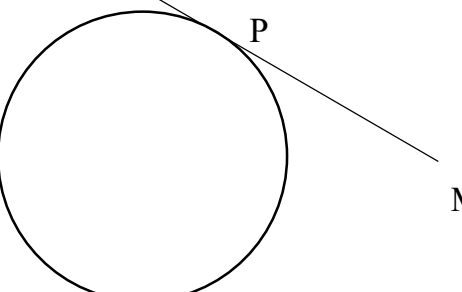
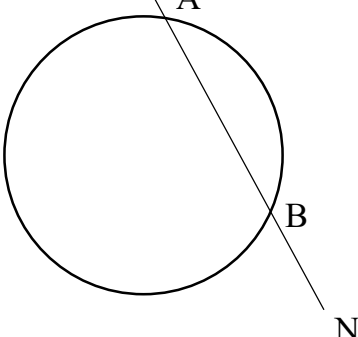
看完點與圓的位置關係後，接下來再看直線與圓的位置關係。

※圓與線的位置關係

下面有一個圓，請試著畫畫看不同的直線，並想想看直線與圓可能有幾個交點？

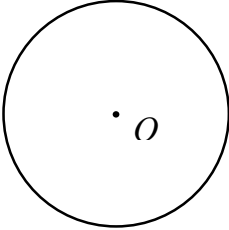
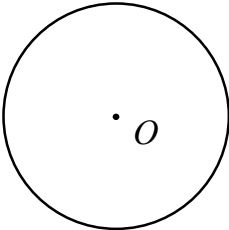
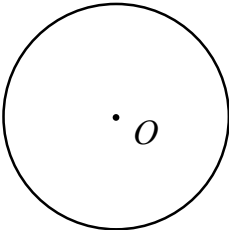


事實上，一條直線與一個圓的交點個數有三種可能，分別是 0 個交點、1 個交點、2 個交點：

<p>直線與圓 0 個交點，就是直線與圓不相交，如右圖，會發現直線 L 上的點都在圓 O 外面。</p>	 <p>A circle is shown on the left. To its right, a straight line labeled 'L' is drawn at an angle, passing entirely above and to the right of the circle without touching it.</p>
<p>直線與圓只有 1 個交點，就是直線與圓剛好相切，如右圖，直線 M 上與圓 O 只交於一點 P，而直線 M 稱為圓 O 的「切線」，P 點稱為切點。</p>	 <p>A circle is shown on the left. A straight line labeled 'M' is drawn tangent to the top-right edge of the circle. The point of contact is labeled 'P'.</p>
<p>直線與圓有 2 個交點，如右圖，直線 N 與圓 O 交於 A、B 兩點，而 N 稱為圓 O 的「割線」。</p>	 <p>A circle is shown on the left. A straight line labeled 'N' is drawn passing through the circle, intersecting it at two points labeled 'A' and 'B'.</p>

※圓與線的位置關係判別

前面提到可以利用點到圓心的距離來判斷點與圓的位置關係，而是否可以利用圓心到直線的距離來判斷直線與圓的位置關係呢？試試看利用下表中的敘述畫出符合敘述的直線：

敘述	畫圖
<p>情形 1.</p> <p>圓 O 是半徑為 3 的圓，請畫出與圓心距離為 3 的直線 L。</p>	
<p>情形 2.</p> <p>圓 O 是半徑為 3 的圓，請畫出與圓心距離為 6 的直線 M。</p>	
<p>情形 3.</p> <p>圓 O 是半徑為 3 的圓，請畫出與圓心距離為 1 的直線 N。</p>	

畫出來後會發現：

1. 圓心到直線的距離剛好等於半徑的話，直線與圓就只會交於一點，那條直線即是切線，相交的那點即是切點。
2. 如果圓心到直線的距離比半徑還大的話，直線與圓就不會有交點。
3. 如果圓心到直線的距離比半徑還小的話，則直線與圓會有兩個交點。

還不是很懂的話可以掃掃看右邊的 QR-Code！



例題二：平面中有一圓 O 與三條相異直線 L_1 、 L_2 、 L_3 ，已知圓 O 的半徑為 6，依據圓心 O 到各相異直線的距離，回答下列問題：

(1) 若圓心 O 到直線 L_1 的距離為 8，則直線 L_1 與圓 O 有幾個交點？

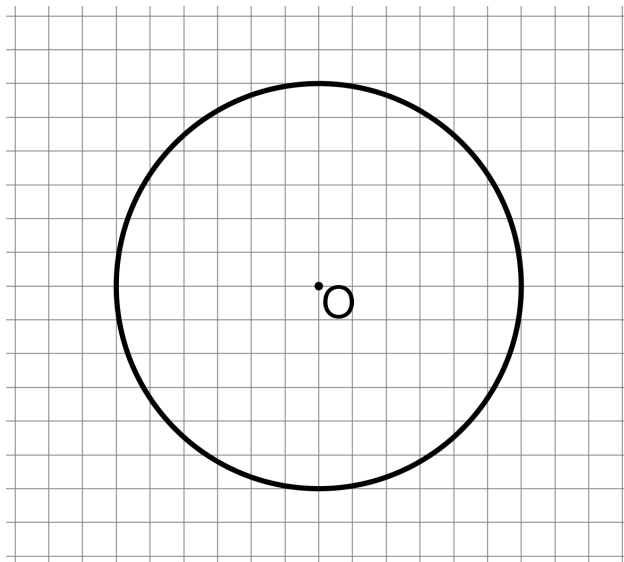
(2) 若圓心 O 到直線 L_2 的距離為 4，則直線 L_2 與圓 O 有幾個交點？

此時稱直線 L_2 為圓 O 的_____。

(3) 若圓心 O 到直線 L_3 的距離為 6，則直線 L_3 與圓 O 有幾個交點？

此時稱直線 L_3 為圓 O 的_____。

解一：試著將題目的圖形畫出來：



正確畫出來後就可以判斷它的位置了！

除此之外，也可以直接利用圓心到直線的距離與半徑做比較，然後判

斷它的位置！

解二：

(1) 圓心 O 到直線 L_1 的距離為 $8 >$ 半徑 6

$\Rightarrow L_1$ 與圓 O 沒有交點。

(2) 圓心 O 到直線 L_2 的距離為 $4 <$ 半徑 6

$\Rightarrow L_2$ 與圓 O 有 2 個交點， L_2 也稱為圓 O 的割線。

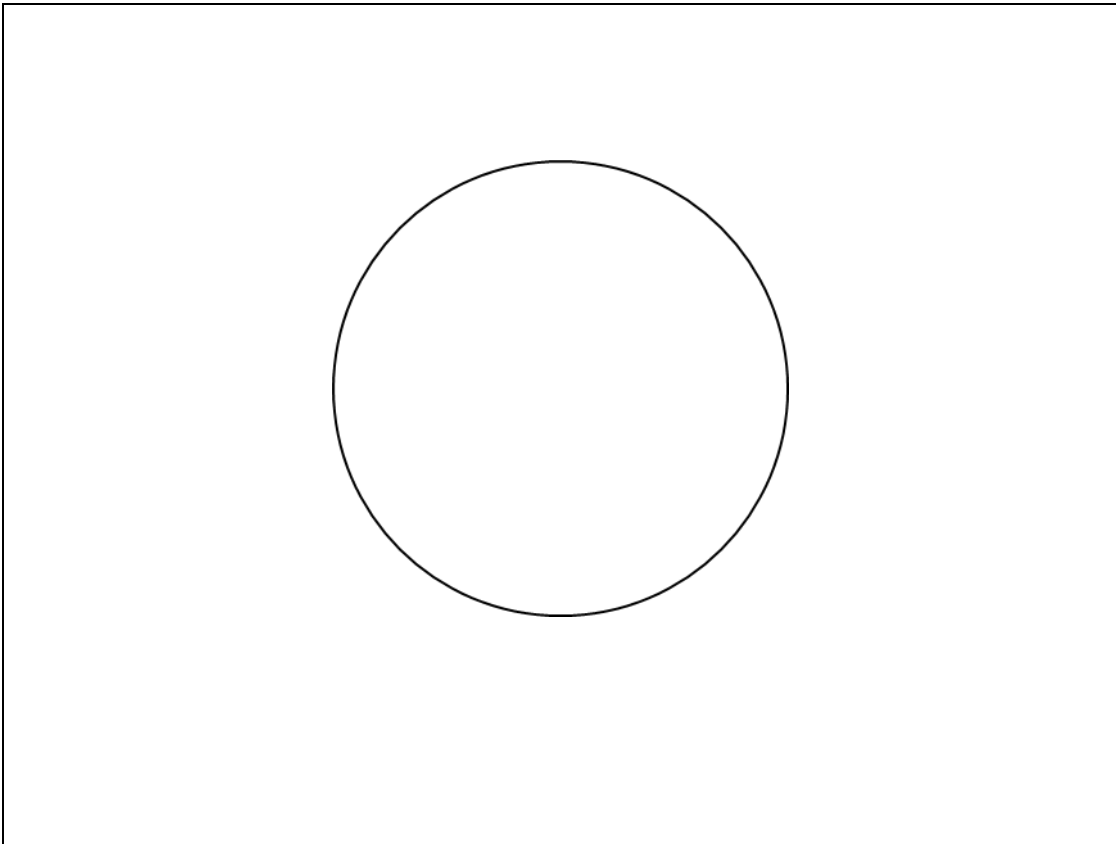
(3) 圓心 O 到直線 L_3 的距離為 $6 =$ 半徑 6

$\Rightarrow L_3$ 與圓 O 只有 1 個交點， L_3 也稱為圓 O 的切線。

下一個要討論兩圓的位置關係！

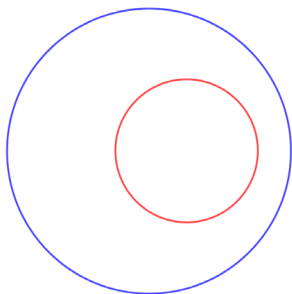
※圓與圓的位置關係

下面有一個圓 O_1 ，請再畫出另外一個與圓 O_1 不同大小的圓，並想想看這兩個圓可能會有幾種位置關係？



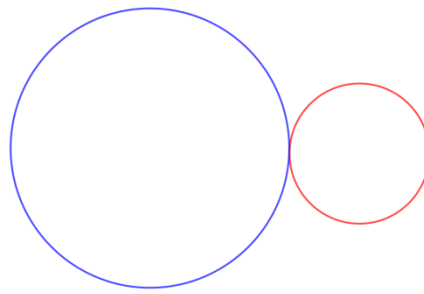
事實上，兩個不同大小的圓之間位置關係可能會有 5 種：

1.小圓在大圓內部分離：



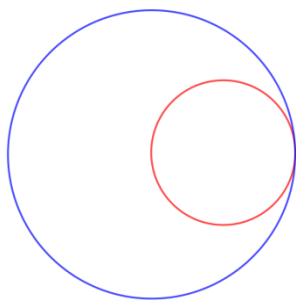
我們稱這兩個圓「內離」。

4.小圓在大圓外面相切一點：



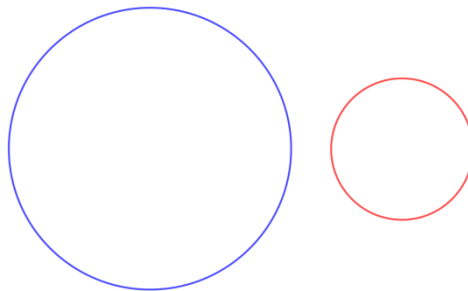
我們稱這兩個圓「外切」。

2.小圓在大圓內部相切一點：



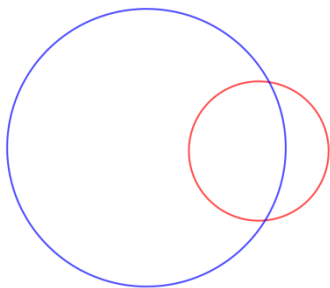
我們稱這兩個圓「內切」。

5.小圓在大圓外面分離：



我們稱這兩個圓「外離」。

3.兩個圓相交兩點：

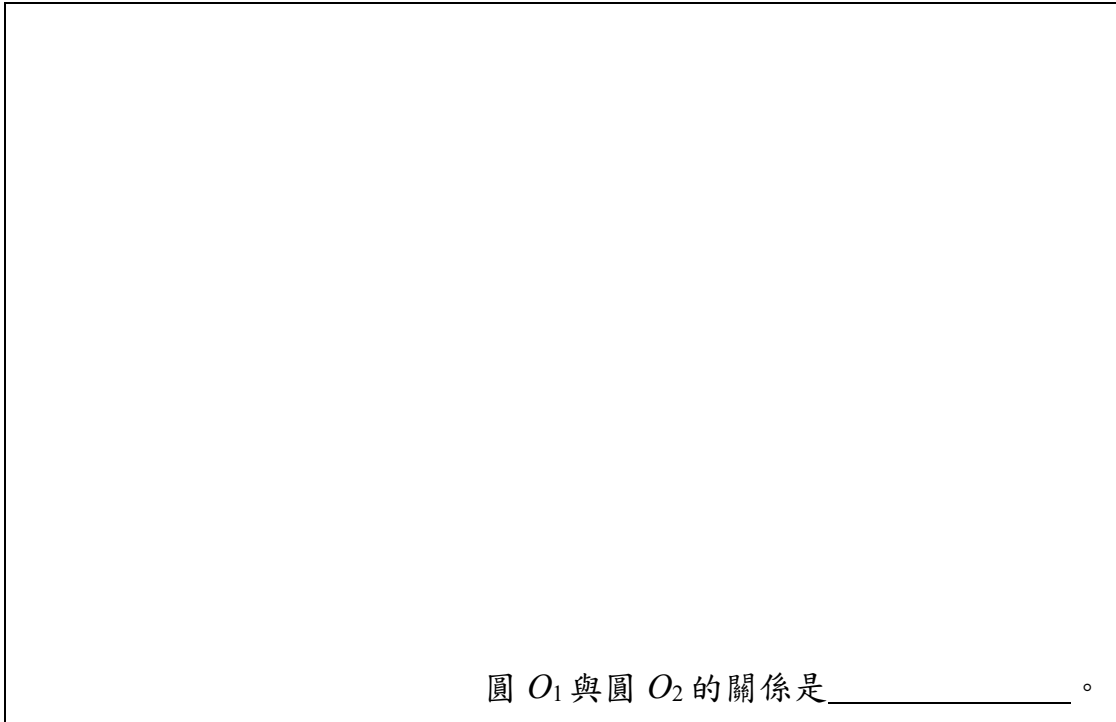


那如何判斷兩圓的位置關係呢？承續與前面所討論的，我們可以利用兩個圓心的距離以及半徑的大小來判斷！

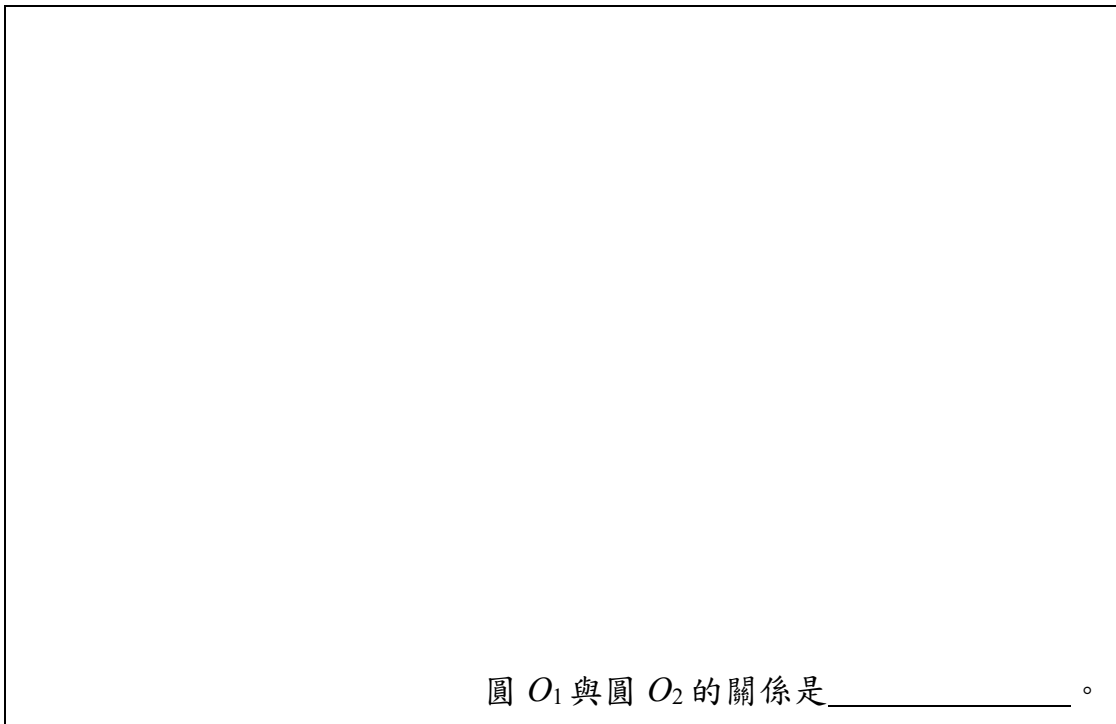
※圓與圓的位置關係判別

下面當中有一些不同的情形，請根據這些敘述畫出圖形來：

1. 圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 5 和 2， $\overline{O_1O_2}=10$ ：



2. 圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 5 和 2， $\overline{O_1O_2}=7$ ：



3. 圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 5 和 2， $\overline{O_1O_2}=4$ ：

圓 O_1 與圓 O_2 的關係是_____。

4. 圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 5 和 2， $\overline{O_1O_2}=3$ ：

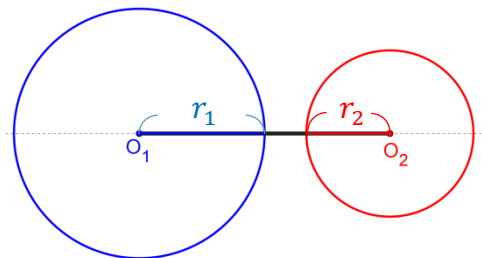
圓 O_1 與圓 O_2 的關係是_____。

5. 圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 5 和 2， $\overline{O_1O_2}=1$ ：

圓 O_1 與圓 O_2 的關係是_____。

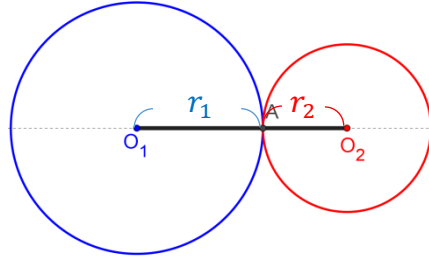
從上面畫圖的過程當中我們可以發現，兩圓之間的位置關係與 $\overline{O_1O_2}$ 、圓 O_1 半徑、圓 O_2 半徑有關，其中兩個圓心的距離 $\overline{O_1O_2}$ 我們稱為連心線段長。

1. 如果連心線段長比兩圓的半徑和還大 ($\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$) 時，
那麼這兩個圓就會外離。



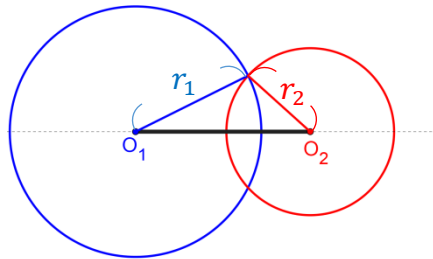
2. 如果連心線段長與兩圓的半徑和一樣 ($\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$) 時，

那麼這兩個圓就會外切。



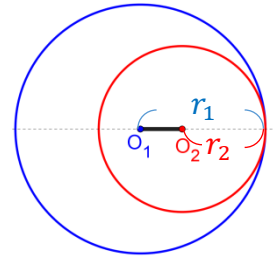
3.如果連心線段長比兩圓的半徑和還小、且比兩圓的半徑差還大

$(r_1 - r_2 < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2)$ 時，那麼這兩個圓就會相交於兩點。



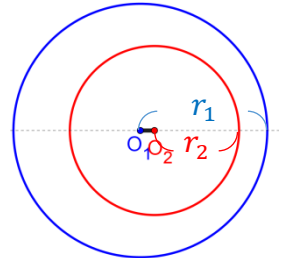
4.如果連心線段長與兩圓的半徑差一樣 $(\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2)$ 時，

那麼這兩個圓就會內切。

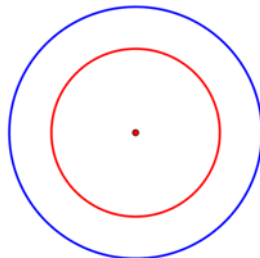


5.如果連心線段長比兩圓的半徑差還小 $(\overline{O_1O_2} < r_1 - r_2)$ 時，

那麼這兩個圓就會內離。



特別的是，如果兩個圓的圓心重合時，我們就稱這兩個圓為同心圓！



還不是很懂的話可以掃掃看右邊的 QR-Code !



例題三：圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 2 和 5，請依照下面表格所給定的連心線段 $\overline{O_1O_2}$ 長度，完成表格：

$\overline{O_1O_2}$ 長度	7	8	4	3	1
兩圓的位置關係					
兩圓的交點個數					

解：圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 2 和 5，兩圓的半徑差為 $5-2=3$ 、兩圓的半徑和為 $2+5=7$ 。

(1) $7=7$ (連心線段長 = 兩圓的半徑和)

⇒兩個圓的關係是外切，這兩個圓的交點數為 1 個。

(2) $8>7$ (連心線段長 > 兩圓的半徑和)

⇒兩個圓的關係是外離，這兩個圓的交點數為 0 個。

(3) $3<4<7$ (兩圓的半徑差 < 連心線段長 < 兩圓的半徑和)

⇒兩個圓的關係是相交於兩點，這兩個圓的交點數為 2 個。

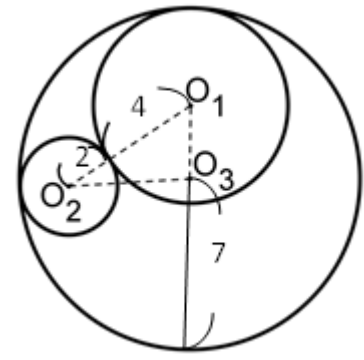
(4) $3=3$ (連心線段長 = 兩圓的半徑差)

⇒兩個圓的關係是內切，這兩個圓的交點數為 1 個。

(5) $1<3$ (連心線段長 < 兩圓的半徑差)

⇒兩個圓的關係是內離，這兩個圓的交點數為 0 個。

例題四：如下圖，圓 O_1 、 O_2 、 O_3 三圓半徑分別為 4、2、7，其中圓 O_1 與圓 O_2 外切、圓 O_2 與圓 O_3 內切、圓 O_3 與圓 O_1 內切，求 $\triangle O_1O_2O_3$ 的周長？



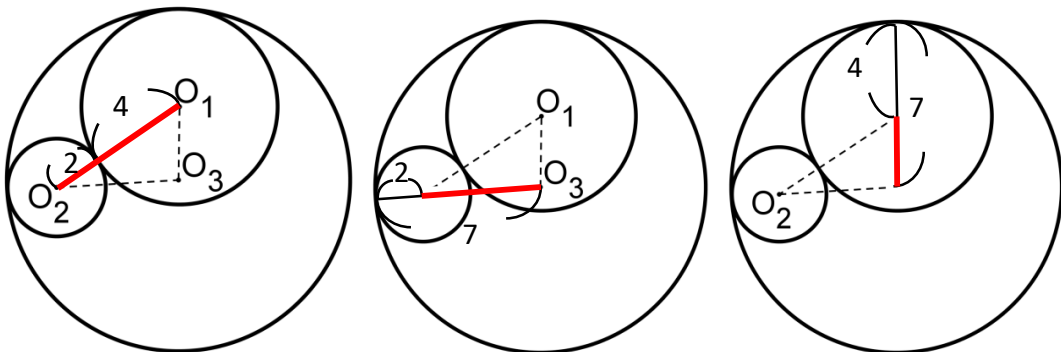
解：分別對照下面 3 個圖，可以看出：

圓 O_1 與圓 O_2 外切，所以 $\overline{O_1O_2} = 4 + 2 = 6$ ；(左圖)

圓 O_2 與圓 O_3 內切，所以 $\overline{O_2O_3} = 7 - 2 = 5$ ；(中間那個圖)

圓 O_3 與圓 O_1 內切，所以 $\overline{O_3O_1} = 7 - 4 = 3$ 。(右圖)

故 $\triangle O_1O_2O_3$ 周長 $= 6 + 5 + 3 = 14$ 。



例題五：已知圓 O_1 半徑大於圓 O_2 ，當兩圓外切時， $\overline{O_1O_2}$ 長為 11，當兩圓內切時， $\overline{O_1O_2}$ 長為 5，求兩圓半徑分別為何？

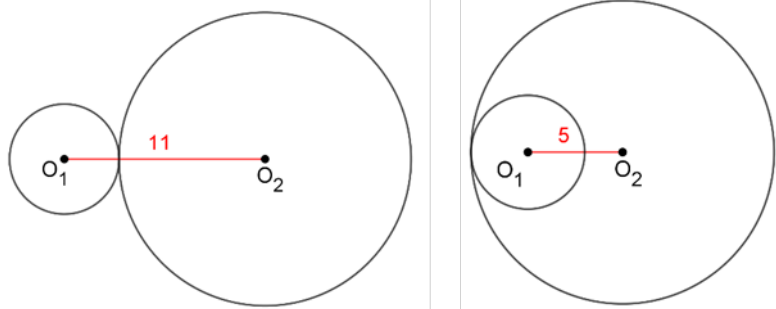
解：令圓 O_1 半徑為 r_1 、圓 O_2 半徑為 r_2 ：

兩圓外切時 $\overline{O_1O_2}$ 長為 11，列式成 $r_1 + r_2 = 11$

兩圓內切時 $\overline{O_1O_2}$ 長為 5，列式成 $r_1 - r_2 = 5$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 11 \dots (1) \\ r_1 - r_2 = 5 \dots (2) \end{cases}$$

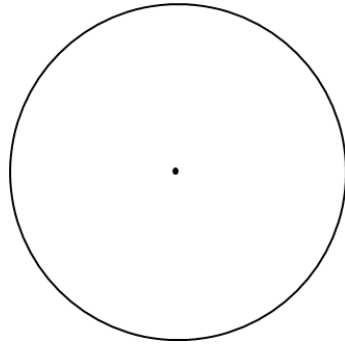
(1)+(2) $\Rightarrow 2r_1 = 16 \Rightarrow r_1 = 8$ 代回(1)： $8 + r_2 = 11 \Rightarrow r_2 = 11 - 8 = 3$



重點提問

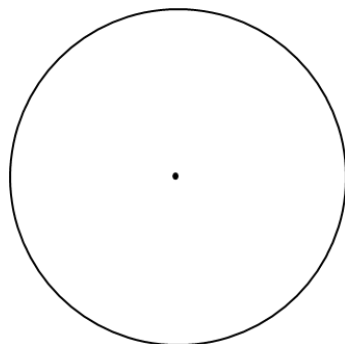
1. 根據上面的課文，點與圓的位置關係有哪幾種？如何判斷？

請說明並利用下面的圓舉出例子加以解釋。



2. 根據上面的課文，直線與圓的位置關係有哪幾種？如何判斷？

請說明並利用下面的圓舉出例子加以解釋。



3.根據上面的課文，兩個大小不同的圓位置關係有 5 種關係，請在下面的表格中畫出這 5 種關係，並說明如何判斷。

(1)內離

(2)內切

(3)交於兩點

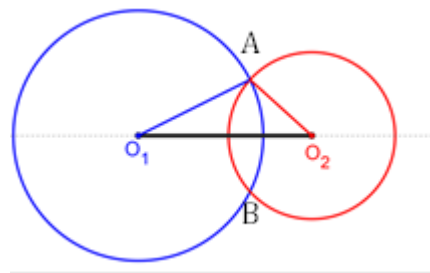
(4)外切

(5)外離

4. 兩個大小相同的圓位置關係會有幾種關係呢？分別是哪幾種？

5. 如圖，如果兩個半徑分別為 r_1 、 r_2 的圓相交兩點 A、B，

則 $r_1 - r_2 < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$ 。為什麼？(可以利用三角形三邊關係解釋)



• 隨堂練習：

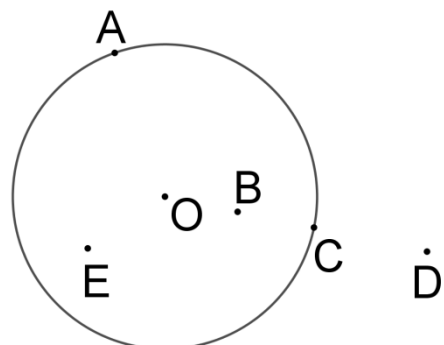
1. 已知圓 O 的半徑為 12，若平面上 A、B、C 三點，與圓心 O 的距離分別為 5、12、13，則 A、B、C 三點與圓 O 之位置關係為何？

2. 如圖，圓 O 的半徑為 5 公分，觀察 A、B、C、D、E、 O 各點。

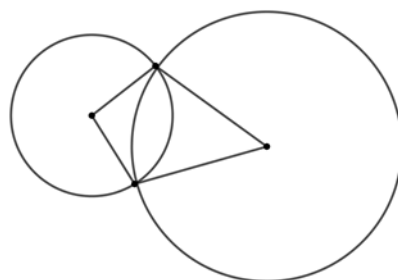
哪些點與圓心距離小於 5 公分？

哪些點與圓心距離等於 5 公分？

哪些點與圓心距離大於 5 公分？



3.如圖，小蘋在紙上畫了2個圓，並利用圓心與圓的一些交點作出4條線段。若此2圓的半徑分別為3、5，則這4條線段的總長度為多少？



4.平面中有一圓 O 與三條相異直線 L_1 、 L_2 、 L_3 ，已知圓 O 的半徑為 15，依據圓心 O 到各相異直線的距離，回答下列問題：

(1)若圓心 O 到直線 L_1 的距離為 17，則直線 L_1 與圓 O 的交點數有_____個。

(2)若圓心 O 到直線 L_2 的距離為 15，則直線 L_2 與圓 O 的交點數有_____個，又稱直線 L_2 為_____。

(3)若圓心 O 到直線 L_3 的距離為 10，則直線 L_3 與圓 O 的交點數有_____個，又稱直線 L_3 為_____。

5.若圓 O_1 、圓 O_2 的半徑分別為 7、25。請填填看：

(1)當兩圓內切時， $\overline{O_1O_2}$ =_____。

(2)當兩圓外切時， $\overline{O_1O_2}$ =_____。

(3)當兩圓相交於兩點時，_____ < $\overline{O_1O_2}$ < _____。

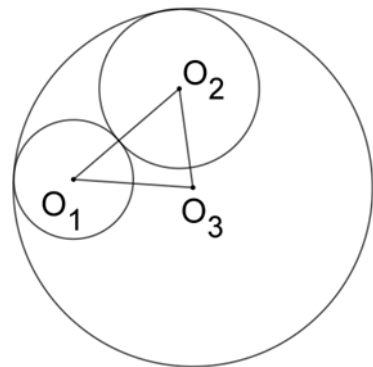
(4)當兩圓內離時，連心線段長的範圍為_____。

(5)當兩圓外離時，連心線段長的範圍為_____。

6. 圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 6 和 11，請依照下表格所給定的連心線段 $\overline{O_1O_2}$ 長度，完成表格：

$\overline{O_1O_2}$ 長度	3	5	7	17	21
位置關係					
兩圓的交點個數					

7. 如下圖，圓 O_1 、 O_2 、 O_3 三圓半徑分別為 3、4、7，其中圓 O_1 與圓 O_2 外切、圓 O_2 與圓 O_3 內切、圓 O_3 與圓 O_1 內切，求 $\triangle O_1O_2O_3$ 的周長？



8. 已知圓 O_1 半徑大於圓 O_2 ，當兩圓外切時， $\overline{O_1O_2}$ 長為 10，當兩圓內切時， $\overline{O_1O_2}$ 長為 6，求兩圓半徑分別為何？