

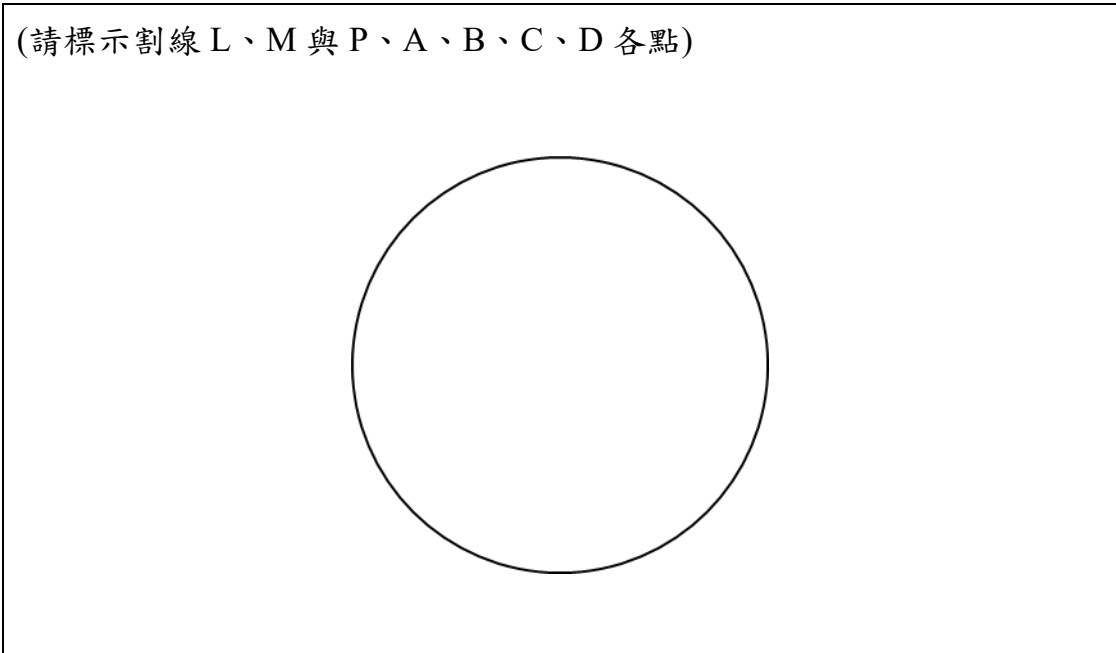
單元四 圓與相似形的應用

課文A： 圓的兩條割線性質

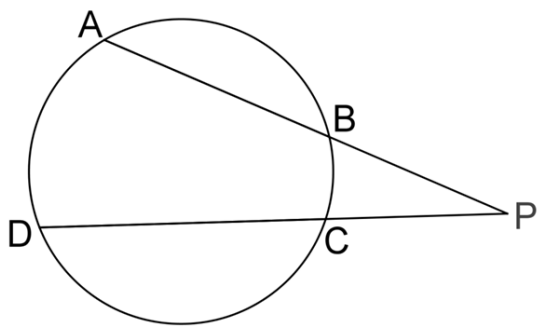
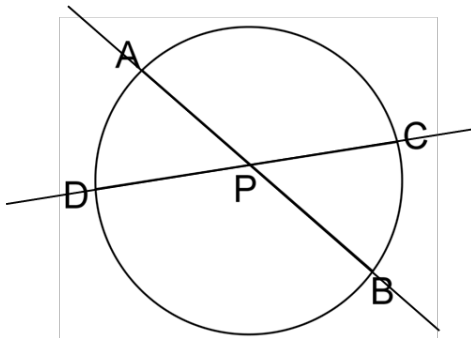
在認識完圓與角的關係後，接下來要看圓與兩線段的關係！

首先請試著依據步驟將圖畫出來，下圖中有一圓 O ，畫出兩條不平行且相異的圓 O 割線 L 、 M ，而且 L 和 M 相交於 P 點， L 與圓 O 相交於 A 、 B 兩點， M 與圓 O 相交於 C 、 D 兩點：

(請標示割線 L 、 M 與 P 、 A 、 B 、 C 、 D 各點)

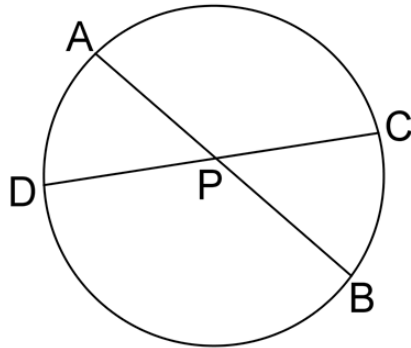


想想看，在上面的作圖中，你可能會畫出幾種不同的圖形呢？其實會有兩類，一類是兩條割線相交於圓內，另外一類是兩條割線相交於圓外，如下圖：

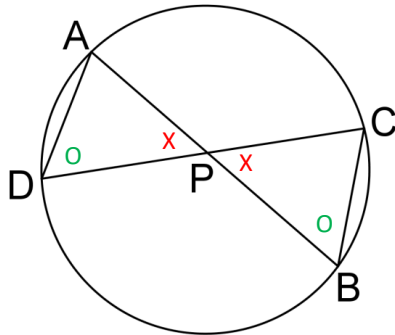


而這兩種圖形的線段都有特殊的關係，下面我們就來討論這種關係！

如下圖，圓 O 兩弦 \overline{AB} 和 \overline{CD} 相交於 P 點，則 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$



連接 \overline{AD} 及 \overline{CB} ：



$\angle DPA$ 與 $\angle CPB$ 是對頂角，所以 $\angle DPA = \angle CPB$ ，

圓周角 $\angle D$ 、 $\angle B$ 所對的弧都是 \widehat{CA} ，所以 $\angle D = \angle B$ ；

根據三角形 AA 相似性質， $\triangle ADP$ 和 $\triangle CBP$ 相似。

其中 \overline{PA} 和 \overline{PC} 是對應邊、 \overline{PD} 和 \overline{PB} 是對應邊，所以可以列出式子：

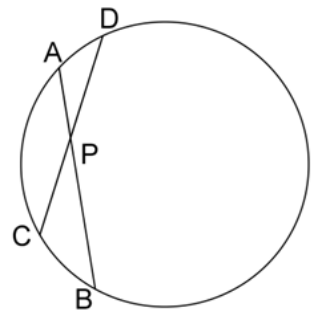
$$\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$$

$$\text{可得 } \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$

這個性質稱為「圓內幕性質」。

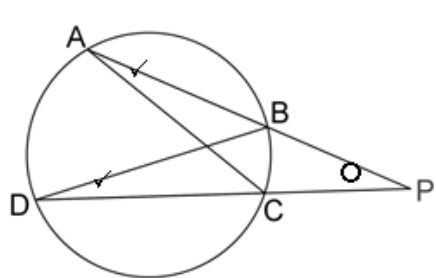
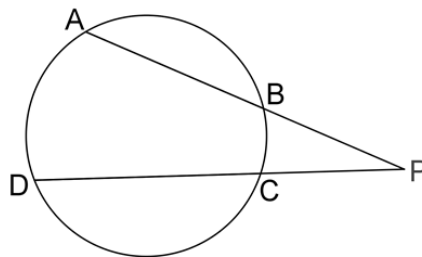
例題一：如圖，圓 O 兩弦 \overline{AB} 和 \overline{CD} 相交於 P 點，

若 $\overline{PA}=6$ 、 $\overline{PB}=12$ 、 $\overline{PC}=8$ ，則 $\overline{PD}=?$



解： $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD} \Rightarrow 6 \times 12 = 8 \times \overline{PD} \Rightarrow \overline{PD} = 9$

下一個要討論的就是圓的兩條割線相交在圓外的狀況！如下圖，延伸圓 O 兩弦 \overline{AB} 和 \overline{CD} 相交於圓外一點 P，則 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$



連接 \overline{AD} 及 \overline{CB} ：

圓周角 $\angle D$ 、 $\angle A$ 所對的弧都是 \widehat{CB} ，所以 $\angle D = \angle A$ ，

兩個三角形中都有共同的 $\angle P$ ，所以 $\angle P = \angle P$ ；

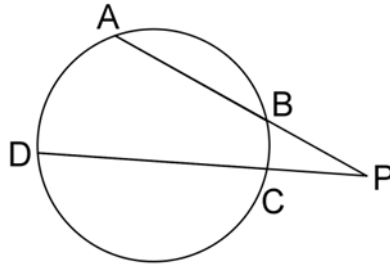
根據三角形 AA 相似性質， $\triangle ACP$ 和 $\triangle DBP$ 相似。

其中 \overline{PA} 和 \overline{PD} 是對應邊、 \overline{PC} 和 \overline{PB} 是對應邊，所以可以列出式子：

$$\overline{PA} : \overline{PD} = \overline{PC} : \overline{PB}$$

可得 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ ，這個性質稱為「圓外冪性質」。

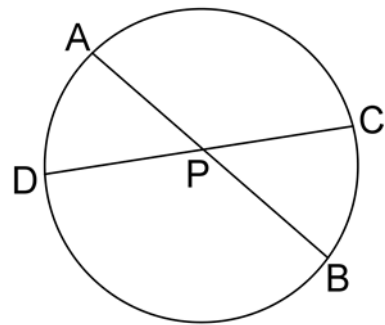
例題二：如圖，延伸圓 O 兩弦 \overline{AB} 和 \overline{CD} 相交於圓外一點 P，若 $\overline{AP}=12$ 、 $\overline{BP}=8$ 、 $\overline{CP}=6$ ，則 $\overline{DP}=?$



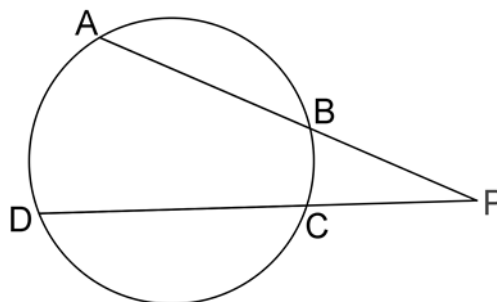
解： $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD} \Rightarrow 12 \times 8 = 6 \times \overline{PD} \Rightarrow \overline{PD} = 16$

重點提問

1. 下圖中，圓 O 兩弦 \overline{AB} 、 \overline{CD} 相交於 P 點，請問 \overline{PA} 、 \overline{PB} 、 \overline{PC} 、 \overline{PD} 有什麼關係？為什麼？



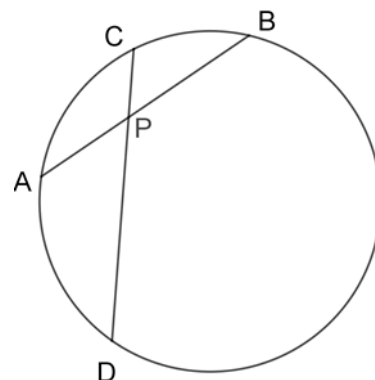
2. 下圖中，圓 O 兩割線 \overline{AB} 、 \overline{CD} 相交於 P 點，請問 \overline{PA} 、 \overline{PB} 、 \overline{PC} 、 \overline{PD} 有什麼關係？為什麼？



• 隨堂練習：

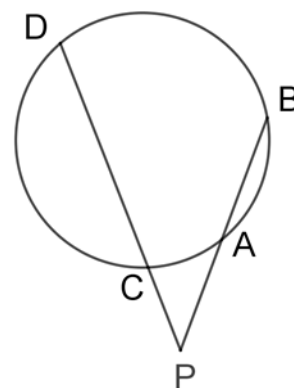
1. 如圖，圓 O 兩弦 \overline{AB} 、 \overline{CD} 相交於 P 點，

若 $\overline{PA}=3$ 、 $\overline{PB}=4$ 、 $\overline{PC}=2$ ，則 $\overline{PD}=?$



2. 如圖，延伸圓 O 兩弦 \overline{AB} 和 \overline{CD} 相交於圓外一點 P ，

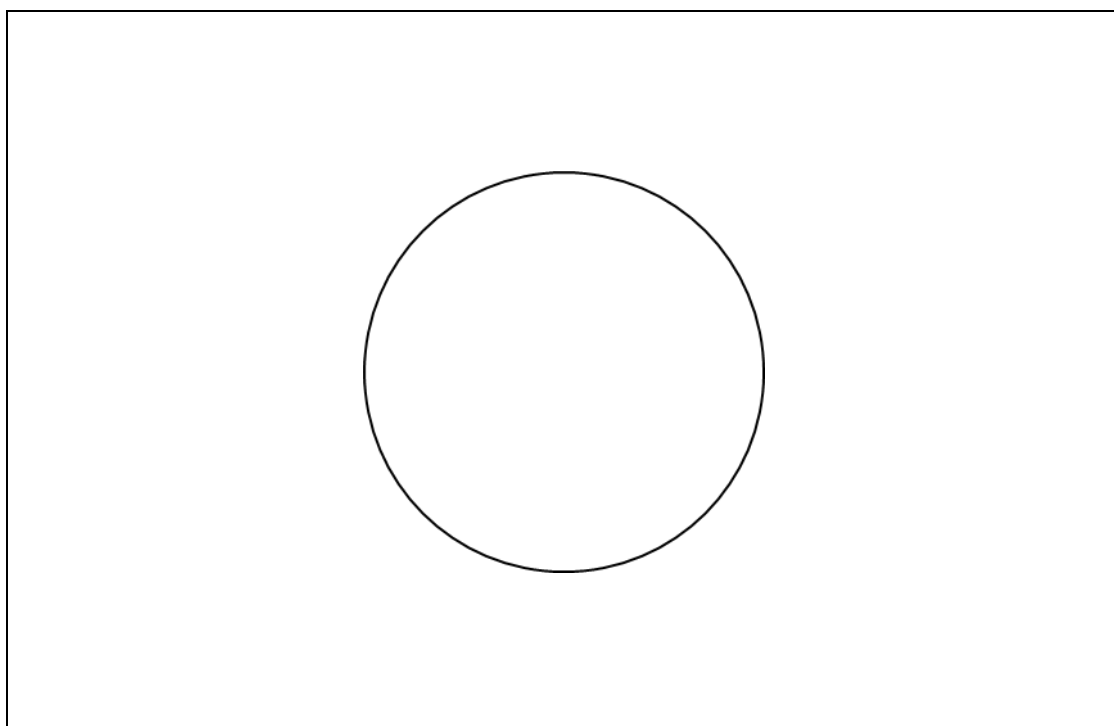
若 $\overline{PA}=6$ 、 $\overline{AB}=6$ 、 $\overline{PC}=4$ ，則 $\overline{CD}=?$



課文B： 圓的切線及割線性質

下一個要介紹的就是切割性質，顧名思義就是需要一條切線、一條割線，先試著依據步驟將圖畫出來！

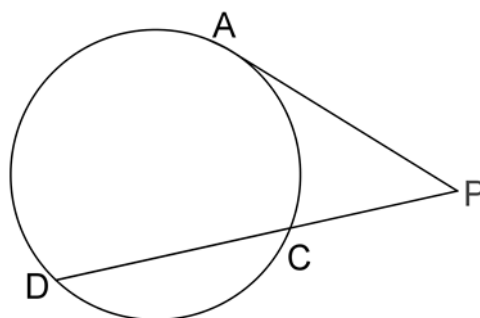
下圖中有一圓 O，請畫出一條切線 L 以及一條割線 M，而且 L 和 M 相交於圓外一點 P 點，L 與圓 O 相切於 A 點，M 與圓 O 相交於 C、D 兩點：



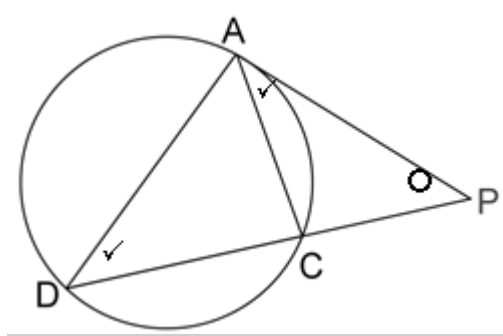
根據你所畫出來的圖形，會有一種線段關係： $\overline{PA}^2 = \overline{PC} \times \overline{PD}$ 。

下面我們就來證明這個性質！

如下圖， \overline{PA} 切圓 O 於 A 點， \overline{PD} 為割線，交圓 O 於 C、D 兩點：



連接 \overline{AC} 及 \overline{AD} :



圓周角 $\angle D$ 所對的弧是 \widehat{AC} ，所以 $\angle D = \frac{1}{2} \widehat{AC}$ ，

弦切角 $\angle PAC$ 所對的弧也是 \widehat{AC} ，所以 $\angle PAC = \frac{1}{2} \widehat{AC}$ ，

因此 $\angle D = \frac{1}{2} \widehat{AC} = \angle PAC$ ；

而兩個三角形中都有共同的 $\angle P$ ，所以 $\angle P = \angle P$ ；

根據三角形 AA 相似性質， $\triangle ACP$ 和 $\triangle ADP$ 相似。

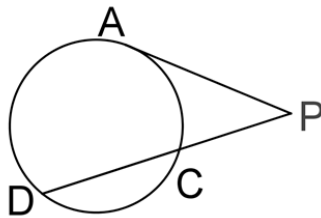
其中 \overline{PA} 和 \overline{PD} 是對應邊、 \overline{PC} 和 \overline{PA} 是對應邊，

所以可以列出式子： $\overline{PA} : \overline{PD} = \overline{PC} : \overline{PA}$

$$\overline{PA} \times \overline{PA} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$

$$\text{亦即 } \overline{PA}^2 = \overline{PC} \times \overline{PD}$$

例題一：如圖， \overline{PA} 切圓 O 於 A 點， \overline{PD} 為割線，交圓 O 於 C、D 兩點，
若 $\overline{PC} = 4$ 、 $\overline{CD} = 5$ ，則 $\overline{PA} = ?$



解：由前一頁的結論，可得 $\overline{PA}^2 = \overline{PC} \times \overline{PD}$

$$\text{又 } \overline{PD} = \overline{PC} + \overline{CD}$$

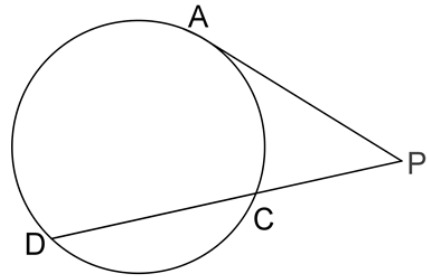
$$\text{所以 } \overline{PA}^2 = 4 \times 9 = 36$$

$$\overline{PA} = \pm \sqrt{36} = \pm 6 \quad (\text{因為 } \overline{PA} \text{ 是長度，所以負不合)}$$

$$\overline{PA} = 6$$

重點提問

1. 如下圖， \overline{PA} 切圓 O 於 A 點，割線 \overline{PD} 交圓 O 於 C、D 兩點，
請問 \overline{PA} 、 \overline{PC} 、 \overline{PD} 有什麼關係？為什麼？



• 隨堂練習：

1. 如下圖， \overline{PA} 切圓 O 於 A 點，割線 \overline{PD} 交圓 O 於 C、D 兩點，
若 $\overline{PC} = 3$ 、 $\overline{CD} = 9$ ，則 $\overline{PA} = ?$

