

單元四：多項式四則運算的綜合應用

課文：多項式四則運算的綜合應用

讓我們直接用幾個題目來練習一下！

Ex 1：計算 $(2x - 3)(3x + 4) - (5x - 3)(x - 2) = ?$

Ex 2：已知

$(3x^2 - 2x + 1)(ax + b) - 5$ 化簡後會得到 $9x^3 - 12x^2 + 7x - 7$ ，求
a、b 的值。

Ex 3：梯形 ABCD 上底為 $5x - 4$ ，下底為 $3x + 2$ ，高為 $x - 2$ ，將梯
形 ABCD 面積以 x 的多項式表示，並以降冪方式排列。

Ex 4：已知 $(x^2 + mx + n)(x^2 - 2x + 3)$ 展開後， x^3 項和 x^2 項係數均
為 0，求 m 、 n 。

Ex 1：計算 $(2x - 3)(3x + 4) - (5x - 3)(x - 2) = ?$

解： $(2x - 3)(3x + 4) - (5x - 3)(x - 2)$

$$= (6x^2 + 8x - 9x - 12) - (5x^2 - 10x - 3x + 6)$$
$$= (6x^2 - x - 12) - (5x^2 - 13x + 6)$$
$$= 6x^2 - x - 12 - 5x^2 + 13x - 6$$
$$= x^2 + 12x - 18$$

Ex 2：已知 $(3x^2 - 2x + 1)(ax + b) - 5$ 化簡後會得到 $9x^3 - 12x^2 + 7x - 7$ ，求 a、b 的值。

解：首先我們先化簡 $(3x^2 - 2x + 1)(ax + b) - 5$

$$(3x^2 - 2x + 1)(ax + b) - 5$$
$$= 3ax^3 + 3bx^2 - 2ax^2 - 2bx + ax + b - 5$$
$$= 3ax^3 + (3b - 2a)x^2 + (a - 2b)x + (b - 5)$$

題目告訴我們，化簡後會得到 $9x^3 - 12x^2 + 7x - 7$

所以

$$3ax^3 + (3b - 2a)x^2 + (a - 2b)x + (b - 5) = 9x^3 - 12x^2 + 7x - 7$$

換句話說 $3a = 9$, $3b - 2a = -12$, $a - 2b = 7$, $b - 5 = -7$

所以 $a = 3$ 、 $b = -2$

答： $a = 3$ 、 $b = -2$

Ex 3：梯形 ABCD 上底為 $5x - 4$ ，下底為 $3x + 2$ ，高為 $x - 2$ ，將梯形 ABCD 面積以 x 的多項式表示，並以降冪方式排列。

解：梯形 ABCD 面積 = $\frac{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}}{2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{[(5x - 4) + (3x + 2)] \times (x - 2)}{2} = \frac{(8x - 2) \times (x - 2)}{2} \\ &= \frac{8x^2 - 16x - 2x + 4}{2} = \frac{8x^2 - 18x + 4}{2} \\ &= 4x^2 - 9x + 2 \end{aligned}$$

答： $4x^2 - 9x + 2$

Ex 4：已知 $(x^2 + mx + n)(x^2 - 2x + 3)$ 展開後， x^3 項和 x^2 項係數均為 0，求 m 、 n 。

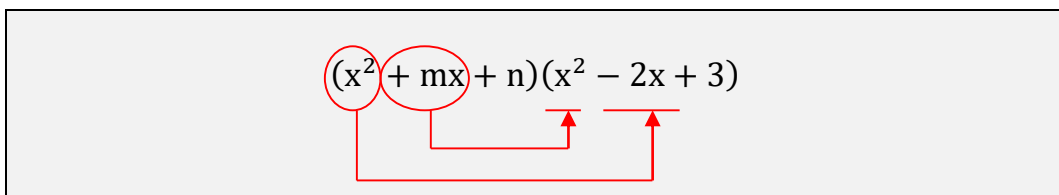
◎解題思維：

這道題目給我們兩個關鍵的條件是「 x^3 項和 x^2 項係數均為0」。換句話說，我們如果把 $(x^2 + mx + n)(x^2 - 2x + 3)$ 展開，然後找出它的 x^3 項和 x^2 項係數，就可以利用「 x^3 項和 x^2 項係數均為0」這個條件列出兩個等式，然後求出 m 、 n 。

但是，將 $(x^2 + mx + n)(x^2 - 2x + 3)$ 展開要花上一些時間，加上展開後我們其實只用到 x^3 項和 x^2 項。那麼，有沒有辦法直接找出展開後的 x^3 項和 x^2 項呢？

我們不妨來想一想，什麼情況下會乘出 x^3 項？

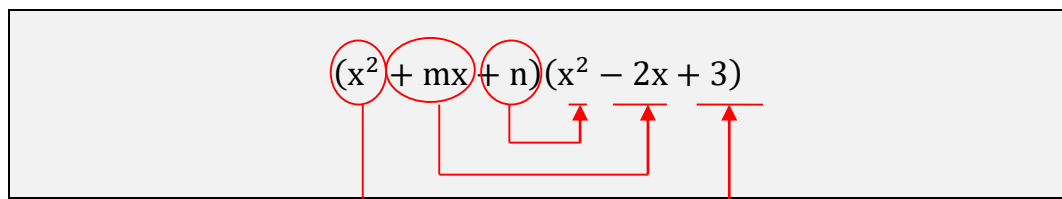
當我們要乘開 $(x^2 + mx + n)(x^2 - 2x + 3)$ 時，當前面括號內的 x^2 乘以後面括號內的 $-2x$ 時，便會乘出 x^3 項，也就是 $-2x^3$ 。另外，當前面括號內的 $+mx$ 乘上後面括號內的 x^2 時，會產生 $+mx^3$ 。除此之外不會產生任何的 x^3 項。所以合併 $-2x^3$ 和 $+mx^3$ 這兩個結果，就會得到 $(-2 + m)x^3$ 。如下圖：



而題目告訴我們 x^3 項係數=0。所以我們就可以得到 $-2 + m = 0$ ，並且解出 $m = 2$ 。

同樣的道理，什麼情況下會乘出 x^2 項？

當前面括號內的 x^2 乘上後面括號內的 $+3$ 時，會產生 $+3x^2$ 。而當前面括號內的 $+mx$ 乘上後面括號內的 $-2x$ 時，會產生 $-2mx^2$ 。另外，當前面括號內的 $+n$ 乘上後面括號內的 x^2 時，會產生 $+nx^2$ 。除此之外不會產生任何的 x^2 項。所以合併 $+3x^2$ 、 $-2mx^2$ 和 $+nx^2$ 這三個結果，就會得到 $(3 - 2m + n)x^2$ 。如下圖：



而題目告訴我們 x^2 項係數 $=0$ 。所以我們就可以得到 $3 - 2m + n = 0$ ，代入剛剛解出的 $m = 2$ ，就可以解出 $n = 1$ 。

解： 展開 $(x^2 + mx + n)(x^2 - 2x + 3)$ ，會得到

x^2 項： $3x^2 - 2mx^2 + nx^2 = (3 - 2m + n)x^2$

x^3 項： $-2x^3 + mx^3 = (-2 + m)x^3$

因為 x^3 項和 x^2 項係數均為 0 ，所以

$$\begin{cases} 3 - 2m + n = 0 \dots \textcircled{1} \\ -2 + m = 0 \dots \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

由 $\textcircled{2}$ 得 $m = 2$ ，代入 $\textcircled{1}$

得到 $3 - 4 + n = 0$

所以 $-1 + n = 0$

故 $n = 1$

答： $m = 2$ 、 $n = 1$

• 隨堂練習：

1. 計算 $(3x - 2)(4x + 1) - (2x - 5)(3x + 2) = ?$
2. 已知 $(2x^2 - x + 3)(ax + b) - 5$ 化簡後會得到 $4x^3 - 8x^2 + 9x - 9$ ，求 a 、 b 的值。
3. 梯形 ABCD 上底為 $2x - 3$ ，下底為 $5x + 2$ ，高為 $2x + 1$ ，求梯形 ABCD 面積，並以降冪方式排列。
4. 已知 $(x^2 + mx + n)(x^2 + 2x - 3)$ 展開後， x^3 項和 x^2 項係數均為 0，求 m 、 n 。

還是不太懂，請看下面影片(1)



<https://www.youtube.com/watch?v=YNin2arIYTI>

還是不太懂，請看下面影片(2)



<https://www.youtube.com/watch?v=JvMtzPtY7Hk>