

單元三：多項式的乘除

課文 A：多項式的乘法

介紹完多項式的加減後，接著我們要來談一談多項式的乘法。

還記得我們曾經介紹過的分配律 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ 嗎？

多項式的乘法事實上就是分配律的應用。下面我們就透過兩個題目的練習，讓大家熟習多項式乘法的運算。

Ex 1：計算並化簡 $(2x^2 - 1)(x - 3)$

Ex 2：計算並化簡 $(x + 2)(2x^2 - 3x - 1)$

Ex 1：計算並化簡 $(2x^2 - 1)(x - 3)$

解：

$$(2x^2 - 1)(x - 3)$$

$$= 2x^3 - 6x^2 - x + 3$$

1 2 3 4

◎解題思維：

在這道題目中，我們將分配律應用在多項式的乘法運算，總共有四個計算步驟，如下：

◎第一步：前面的第一項乘以後面的第一項。也就是 $2x^2$ 乘以 x ，
得到 $2x^3$ 。

◎第二步：前面的第一項乘以後面的第二項。也就是 $2x^2$ 乘以 -3 ，
得到 $-6x^2$ 。

◎第三步：前面的第二項乘以後面的第一項。也就是 -1 乘以 x ，
得到 $-x$ 。

◎第四步：前面的第二項乘以後面的第二項。也就是 -1 乘以 -3 ，
得到 $+3$ 。

在這四個步驟的計算中，我們要特別注意多項式中「項」的觀念。

由於多項式中的「項」包含前面的符號，所以當我們在將前面括號中的任何一項乘上後面括號中的任何一項時，都要特別注意到，兩個項符號相乘的變化，如第二步：前面的第一項乘以後面的第二項。也就是 $2x^2$ 乘以 -3 中，前面的 $2x^2$ 雖然沒有寫出「+」號，但它是正的，所以乘上後面的第二項 -3 時，兩個項符號相乘就會得到「正負得負」的效果，所以兩項相乘出來的結果就會是 $-6x^2$ 。

同樣的道理，在第四步前面的第二項乘以後面的第二項。也就是-1乘以-3中，前面的第二項是負的，後面第二項也是負的，所以乘起來後會是「負負得正」，得到+3。

這就是多項式乘法中，我們需要特別注意的地方。

Ex 2：計算並化簡 $(x + 2)(2x^2 - 3x - 1)$

解：

$$\begin{aligned}
 &= 2x^3 - 3x^2 - x + 4x^2 - 6x - 2 \\
 &= 2x^3 - 3x^2 + 4x^2 - x - 6x - 2 \\
 &= 2x^3 + x^2 - 7x - 2
 \end{aligned}$$

同類項合併

◎解題思維：

在這道題目中，總共有六個計算步驟，如下：

- ◎ 第一步：前面的第一項乘以後面的第一項。也就是x乘以 $2x^2$ ，
得到 $2x^3$ 。
- ◎ 第二步：前面的第一項乘以後面的第二項。也就是x乘以 $-3x$ ，
得到 $-3x^2$ 。

⊙ 第三步：前面的第一項乘以後面的第三項。也就是 x 乘以 -1 ，

得到 $-x$ 。

⊙ 第四步：前面的第二項乘以後面的第一項。也就是 $+2$ 乘以 $2x^2$ ，

得到 $+4x^2$ 。

⊙ 第五步：前面的第二項乘以後面的第二項。也就是 $+2$ 乘以 $-3x$ ，

得到 $-6x$ 。

⊙ 第六步：前面的第二項乘以後面的第三項。也就是 $+2$ 乘以 -1 ，

得到 -2 。

重點提問

1. 從前面的課文中，我們知道多項式的乘法只是分配律的應用，唯一需要我們特別注意的地方是什麼？

• 隨堂練習：

1. 計算並化簡 $(3x^2 - 2)(2x - 5)$
2. 計算並化簡 $(x - 2)(3x^2 - 2x - 1)$

還是不太懂，請看下面影片



<https://www.youtube.com/watch?v=EqlCv>

課文 B：多項式的除法

介紹完多項式的加、減、乘法運算後，最後我們要來介紹的是多項式的除法。

在正式進入「多項式的除法」前，讓我們先來回想一下「數字的除法」。

Ex 1：計算 $372 \div 8$ 所得到的商數與餘數。

解：

$$\begin{array}{r} \textcircled{4} \\ 8 \overline{) 372} \end{array}$$

第一步：估計商

$$8 \times \underline{\quad} \leq 37$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{4} \\ \textcircled{8} \overline{) 372} \\ \quad \textcircled{32} \end{array}$$

第二步：將估計商與除數乘開

$$\begin{array}{r} 4 \\ 8 \overline{) 372} \\ \underline{32} \\ 5 \end{array}$$

第三步：被除數減去估計商與除數乘開結果

$$37 - 32 = 5$$

$$8 \overline{) 372} \begin{array}{r} 46 \\ 32 \\ \hline 52 \end{array}$$

重複第一步：估計商

$$8 \times \underline{\quad} \leq 52$$

$$8 \overline{) 372} \begin{array}{r} 46 \\ 32 \\ \hline 52 \\ 48 \\ \hline \end{array}$$

重複第二步：將估計商與除數乘開

$$6 \times 8 = 48$$

$$8 \overline{) 372} \begin{array}{r} 46 \\ 32 \\ \hline 52 \\ 48 \\ \hline 4 \end{array}$$

重複第三步：被除數減去估計商與除數乘開結果

$$52 - 48 = 4$$

答：商 = 46，餘數 = 4

你有沒有發現，在除法計算的過程中，我們其實在重複做三個步驟。就是

- ⊙ 第一步：估計商
- ⊙ 第二步：將估計商與除數乘開
- ⊙ 第三步：被除數減去估計商與除數乘開結果

多項式的除法和數字的除法作法上很類似，也是重複做這三個步驟，只是從「數字」的乘法和減法，變成「式子」的乘法和減法而已。

下面我們要先來練習一下這三個步驟，因為它是多項式除法運算的「基本功」。一旦我們熟悉這三個基本功，對我們進入多項式除法的計算會有相當大的幫助。

※基本功一：估計商的練習

例：完成下列空格，讓等式成立。

(1) $x^2 \times \underline{\hspace{2cm}} = 3x^4$

(2) $2x \times \underline{\hspace{2cm}} = 4x^3$

(3) $2x^2 \times \underline{\hspace{2cm}} = x^3$

(4) $3x \times \underline{\hspace{2cm}} = -5x^4$

(5) $-2x \times \underline{\hspace{2cm}} = -7x^4$

解：(1)

我們在估計商時，可以分成 x 和係數兩個面向來看，以這一題來說，就可以拆成兩個問題來看：

以 x 來看： x^2 要乘以(什麼)才會變成 x^4 ？

以係數來看：1 要乘以(什麼)才會變成 3？(1 是 x^2 的係數)

因此，我們就可以知道 x^2 要乘以(x^2)才會變成 x^4 ，而 1 要乘以(3)才會變成 3。合併這兩個結果，我們就可以知道 $\square = 3x^2$ ，我們稱這個過程叫做「估計商」。

另外，我們也可以用「移項法則」來處理。如下：

$$\begin{aligned} x^2 \times \square &= 3x^4 \\ &= 3x^4 \div x^2 = 3x^2 \end{aligned}$$

一樣也可以估計出商。

※小說明：做移項除法，必須 x 不等於 0 才行！

解：(2)

以 x 來看： x^2 要乘以(什麼)才會變成 x^3 ？

以係數來看：2 要乘以(什麼)才會變成 1？(1 是 x^3 的係數)

因此，我們就可以知道 x^2 要乘以(x)才會變成 x^3 ，而 2 要乘以($\frac{1}{2}$)才會變成 1。

合併這兩個結果，我們就可以知道 $\square = \frac{1}{2}x$ 。

另外，我們也可以用「移項法則」來處理。如下：

$$2x^2 \times \square = x^3$$

$$\square = x^3 \div 2x^2 = \frac{1}{2}x$$

一樣也可以估計出商。

解：(3)

以 x 來看： x 要乘以(什麼)才會變成 x^4 ？

以係數來看：3 要乘以(什麼)才會變成 -5 ？

因此，我們就可以知道 x 要乘以(x^3)才會變成 x^4 ，而 3 要乘以($-\frac{5}{3}$)才會變成 -5 。

合併這兩個結果，我們就可以知道

$$\square = -\frac{5}{3}x^3$$

另外，我們也可以用「移項法則」來處理。如下：

$$3x \times \square = -5x^4$$

$$\square = -5x^4 \div 3x = -\frac{5}{3}x^3$$

一樣也可以估計出商。

解：(4)

以 x 來看： x 要乘以(什麼)才會變成 x^4 ？

以係數來看： -2 要乘以(什麼)才會變成 -7 ？

因此，我們就可以知道 x 要乘以 (x^3) 才會變成 x^4 ，而 -2 要乘以 $(\frac{7}{2})$ 才會

變成 -7 。合併這兩個結果，我們就可以知道 $\square = \frac{7}{2}x^3$

另外，我們也可以用「移項法則」來處理。如下：

$$-2x \times \square = -7x^4$$

$$\square = -7x^4 \div (-2x) = \frac{7}{2}x^3$$

一樣也可以估計出商。

解：(5)

以 x 來看： x 要乘以(什麼)才會變成 x^4 ？

以係數來看： $\frac{1}{2}$ 要乘以(什麼)才會變成 -3 ？

因此，我們就可以知道 x 要乘以 (x^3) 才會變成 x^4 ，而 $-\frac{1}{2}$ 要乘以 (-6) 才會變成 -3 。合併這兩個結果，我們就可以知道

$$\square = -6x^3$$

另外，我們也可以用「移項法則」來處理。如下：

$$\frac{1}{2}x \times \square = -3x^4$$

$$\square = -3x^4 \div \frac{1}{2}x = -6x^3$$

※基本功二：將估計商與除式乘開的練習

例：計算下列各式。

(1) $2x^2 \times (x - 2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\frac{1}{2}x^2 \times (x^2 - 2x + 1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $-\frac{5}{3}x \times (2x^2 + 3x + 1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) $-6x \times \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{3}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：

$$(1) \quad 2x^2 \times (x - 2) = 2x^3 - 4x^2$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}x^2 \times (x^2 - 2x + 1) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$(3) \quad -\frac{5}{3}x \times (2x^2 + 3x + 1) = -\frac{10}{3}x^3 - 5x^2 - \frac{5}{3}x$$

$$(4) \quad -6x \times \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{3}{2}\right) = -4x^3 - x^2 + 9x$$

※基本功三：被除式減去估計商與除式乘開結果的練習

在計算多項式的除法運算時，我們常常會用到兩個多項式相減的技巧，而且都是以直式在運算，所以下面我們就要來練習一下，以直式來做多項式減法的運算。

Ex 3：計算下列各小題

$$(1) \quad 6x^2 + 3x - 5$$

$$\underline{-) 6x^2 - 2x + 3}$$

$$(2) \quad -2x^2 - 5x + 1$$

$$\underline{-) -2x^2 + 3x - 2}$$

解：

$$\begin{array}{r} (1) \quad 6x^2 + 3x - 5 \\ -) \quad 6x^2 - 2x + 3 \\ \hline \quad \quad 5x - 8 \end{array}$$

多項式減法的直式運算

$$x^2 \text{項} : 6x^2 - 6x^2 = 0$$

$$x \text{項} : 3x - (-2x) = 3x + 2x = 5x$$

$$\text{常數項} : -5 - (+3) = -5 - 3 = -8$$

$$\begin{array}{r} (2) \quad -2x^2 - 5x + 1 \\ -) \quad -2x^2 + 3x - 2 \\ \hline \quad \quad -8x + 3 \end{array}$$

多項式減法的直式運算

$$x^2 \text{項} : -2x^2 - (-2x^2) = 0$$

$$x \text{項} : -5x - (+3x) = -5x - 3x = -8x$$

$$\text{常數項} : +1 - (-2) = +1 + 2 = +3$$

★省思：

多項式的直式減法並不難，但是在正負號的處理上，需要細心一些，比方講在第一小題中的 x 項，上面式子是 $3x$ ，下面的式子是 $-2x$ ，當上面的式子減去下面的式子時，就會變成 $3x - (-2x)$ ，因此就會負負得正，變成 $3x + 2x$ ，也就是 $5x$ 。而常數項上面式子是 -5 ，下面的式子是 $+3$ ，當上面的式子減去下面的式子時，就會變成 $-5 - (+3)$ ，因此就會負正得負，變成 $-5 - 3$ ，也就是 -8 。

同樣地，在第二小題中的 x 項，上面式子是 $-5x$ ，下面的式子是 $+3x$ ，當上面的式子減去下面的式子時，就會變成 $-5x - (+3x)$ ，因此就會負正得負，變成 $-5x - 3x$ ，也就是 $-8x$ 。而常數項上面式子是 $+1$ ，下面的式子是 -2 ，當上面的式子減去下面的式子時，就會變成 $+1 - (-2)$ ，因此就會負負得正，變成 $+1 + 2$ ，也就是 $+3$ 。

例：計算下列各小題

$$(1) \quad \begin{array}{r} 2x^2 + 3x - \frac{5}{2} \\ -) 2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{r} -3x^2 - 5x + \frac{2}{3} \\ -) -3x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

解：

(1)

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x - \frac{5}{2} \\ -) 2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{3} \\ \hline \frac{9}{2}x - \frac{19}{6} \end{array}$$

多項式減法的直式運算

$$x^2 \text{項} : 2x^2 - 2x^2 = 0$$

$$x \text{項} : 3x - \left(-\frac{3}{2}x\right) = 3x + \frac{3}{2}x = \frac{9}{2}x$$

$$\text{常數項} : -\frac{5}{2} - \left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{19}{6}$$

(2)

$$\begin{array}{r} -3x^2 - 5x + \frac{2}{3} \\ -) -3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{23}{4}x + \frac{7}{6} \end{array}$$

多項式減法的直式運算

$$x^2 \text{項} : -3x^2 - (-3x^2) = 0$$

$$x \text{項} : -5x - \left(+\frac{3}{4}x\right) = -5x - \frac{3}{4}x =$$

$$-\frac{23}{4}x$$

從上面的幾個練習，我們可以稍微熟悉一下多項式除法運算三步驟所需要的計算工作，接著我們就要正式進入多項式除法。

我們先用下面幾個題目來練習看看！

Ex 1：計算 $(x^2 - 3x + 1) \div (x + 2)$

Ex 2：計算 $(6x^2 + 5) \div (2x - 1)$

Ex 3：計算 $(12x^3 + 7x^2 - 15x + 3) \div (4x^2 + 5x - 1)$ 的商式與餘式。

Ex 4：計算 $(8x^3 + 5x^2 - 3) \div (x^2 - 1)$ 的商式與餘式。

Ex 1：計算 $(x^2 - 3x + 1) \div (x + 2)$

解：

⊙ 第一步：估計商

估算除式的最高次方項要乘以什麼才會變成被除式的最高次方項。

$$\begin{array}{r} \\ x + 2 \overline{) x^2 - 3x + 1} \end{array}$$

基本功一：估計商

$$x \times \underline{\quad} = x^2$$

以這道題目來說，除式 $x + 2$ 的最高次方項 x ，要變成被除式

$x^2 - 3x + 1$ 的最高次方項 x^2 ，必須要乘以 x 。因此我們就可以

估計出商的第一項為 x 。

◎ 第二步：將估計商與除式乘開

基本功二：將估計商與除式乘開

$$x \times (x + 2) = x^2 + 2x$$

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2 \overline{) x^2 - 3x + 1} \\ \underline{x^2 + 2x} \end{array}$$

以這道題目來說，估計商為 x 與除式 $x + 2$ 乘開後會得到 $x^2 + 2x$ 。

◎ 第三步：被除式減去估計商與除式乘開結果

基本功三：被除式減去
估計商與除式乘開結果

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x \\ -) \quad x^2 + 2x \\ \hline -5x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2 \overline{) x^2 - 3x + 1} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ -5x \end{array}$$

接著，將被除式的下一項寫到底下，然後重複步驟一到三。

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2 \overline{) x^2 - 3x + 1} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ -5x + 1 \end{array}$$

◎ 重複第一步：估計商

估算除式的最高次方項要乘以什麼才會變成被除式的最高次方項。

$$\begin{array}{r} \textcircled{x} + 2 \overline{) x^2 - 3x + 1} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ -5x + 1 \end{array}$$

基本功一：估計商

$$x \times \underline{\quad} = -5x$$

在這一步中，除式 $x + 2$ 的最高次方項 x ，要變成新的被除式

$-5x + 1$ 的最高次方項 $-5x$ ，必須要乘以 -5 。

因此我們就可以估計出商的第二項為 -5 。

◎ 重複第二步：將估計商與除式乘開

$$\begin{array}{r} x - 5 \overline{) x^2 - 3x + 1} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ -5x + 1 \\ \underline{-5x - 10} \\ + 11 \end{array}$$

基本功二：將估計商與除式乘開

$$-5 \times (x + 2) = -5x - 10$$

◎ 重複第三步：被除式減去估計商與除式乘開結果

$$\begin{array}{r}
 x - 5 \\
 x + 2 \overline{) x^2 - 3x + 1} \\
 \underline{x^2 + 2x} \\
 -5x + 1 \\
 \underline{-5x - 10} \\
 11
 \end{array}$$

基本功三：被除式減去
估計商與除式乘開結果

$$\begin{array}{r}
 -5x + 1 \\
 -) -5x - 10 \\
 \hline
 11
 \end{array}$$

做到這裡我們發現，如果要再重複第一步估計商，必須要思考

$x \times \underline{\quad} = 11$ 。事實上，餘式 11 是零次方，在多項式中，零次方已經是最低次方，然而除式 $x + 2$ 是一次方。

換句話說，不會有一個商乘上一次方後，反而變零次方。因此，多項式

除法一旦做到餘式的次數比除式低時，就算完成了。所以這一題，得到

餘式 11 時，就已經完成，不用再繼續算下去。所以，在 $(x^2 - 3x +$

$1) \div (x + 2)$ 的計算中，我們得到商式為 $x - 5$ ，餘式為 11 的結果。

Ex 2：計算 $(6x^2 + 5) \div (2x - 1)$

◎解題思維：

這道題目乍看之下可以用上一題的做法直接相除，但是，如果你實際做一次就會發現有些不對勁。主要的原因是被除式 $6x^2 + 5$ 中，缺了 x 項。

像這樣被除式有缺項的題目，我們必須先「補項」後，才能做除法運算，以這題來說，必須先幫被除式 $6x^2 + 5$ 補上 x 項。

可是被除式 $6x^2 + 5$ 本來就沒有 x 項，要怎麼補項呢？其實我們只要加上 $0x$ 就可以了。一來，有了 x 項，方便計算進行。二來，補的是 $0x$ ，並不影響原來被除式。所以補上 $0x$ 項後的被除式就會變成 $6x^2 + 0x + 5$ ，接著我們就可以進行除法運算了。

解：

$$\begin{array}{r} 3x + \frac{3}{2} \\ 2x - 1 \overline{) 6x^2 + 0x + 5} \\ \underline{6x^2 - 3x} \\ 3x + 5 \\ \underline{3x - \frac{3}{2}} \\ \frac{13}{2} \end{array}$$

做到這裡我們發現，餘式 $\frac{13}{2}$ 是零次多項式比除式 $2x - 1$ 一次多項式次數

低，所以多項式除法就完成了。在 $(6x^2 + 5) \div (2x - 1)$ 的計算中，我們

得到商式為 $3x + \frac{3}{2}$ ，餘式為 $\frac{13}{2}$ 的結果。

Ex 3：計算 $(12x^3 + 7x^2 - 15x + 3) \div (4x^2 + 5x - 1)$ 的商式與餘式。

解：

$$\begin{array}{r} 3x - 2 \\ 4x^2 + 5x - 1 \overline{) 12x^3 + 7x^2 - 15x + 3} \\ \underline{12x^3 + 15x^2 - 3x} \\ -8x^2 - 12x + 3 \\ \underline{-8x^2 - 10x + 2} \\ -2x + 1 \end{array}$$

答：商式 $3x - 2$ ，餘式 $-2x + 1$

Ex 4：計算 $(8x^3 + 5x^2 - 3) \div (x^2 - 1)$ 的商式與餘式。

解：

$$\begin{array}{r} 8x + 5 \\ x^2 + 0x - 1 \overline{) 8x^3 + 5x^2 + 0x - 3} \\ \underline{8x^3 + 0x^2 - 8x} \\ 5x^2 + 8x - 3 \\ \underline{5x^2 + 0x - 5} \\ 8x + 2 \end{array}$$

答：商式 $8x + 5$ ，餘式 $8x + 2$

重點提問

1. 依據課文的說明，多項式的除法可以粗分成哪三個步驟？
2. 依據課文的說明，多項式的除法的第一步：估計商，主要是在作什麼？
3. 依據課文的說明，在作多項式的除法時，如果遇到除式或被除式有「缺項」的情形該怎麼做？請你以 $2x^3 - 3$ 為例，說明一下。

• 隨堂練習：

1. 完成下列空格，讓等式成立。

(1) $x^2 \times \underline{\hspace{2cm}} = -2x^4$

(2) $3x^2 \times \underline{\hspace{2cm}} = x^3$

(3) $2x \times \underline{\hspace{2cm}} = -5x^4$

(4) $-3x \times \underline{\hspace{2cm}} = -7x^4$

(5) $\frac{1}{3}x \times \underline{\hspace{2cm}} = -2x^4$

2. 計算下列各式。

(1) $3x^2 \times (x - 3) =$

(2) $\frac{1}{3}x^2 \times (2x^2 - x + 3) =$

(3) $-\frac{2}{3}x \times (x^2 + 2x + 1) =$

(4) $-9x \times (\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}) =$

3. 計算下列各小題

(1) $2x^2 + 5x - 2$

(2) $-3x^2 - 4x + 3$

$-\) \underline{2x^2 - x + 3}$

$-\) \underline{-3x^2 + 2x - 5}$

4. 計算下列各小題

$$(1) \quad 3x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{r} -) \quad 3x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$(2) \quad -2x^2 - 3x + \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{r} -) \quad -2x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \\ \hline \end{array}$$

5. 計算 $(2x^2 - 5x + 1) \div (x - 2)$

6. 計算 $(9x^2 - 5) \div (3x - 1)$

7. 計算 $(8x^3 - 2x^2 - 5x + 3) \div (4x^2 + 5x - 1)$ 的商式與餘式。

8. 計算 $(6x^3 + 4x^2 - 3) \div (x^2 - 1)$ 的商式與餘式。

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
|  |  |  |
| https://www.youtube.com/watch?v=UvDv1-zNXuE | https://www.youtube.com/watch?v=uN0Cb8TdQzE | https://www.youtube.com/watch?v=Wfm1HA20Dv8 |

課文 C：多項式與除法原理

國小時我們曾學過除法原理，也就是

$$\text{被除數} = \text{除數} \times \text{商} + \text{餘數} \quad (\text{其中 } 0 \leq \text{餘數} < \text{除數})$$

上了國中，學了多項式的除法運算，也有除法原理，只不過由國小的

「數」變成國中的「式」，也就是

$$\text{被除式} = \text{除式} \times \text{商式} + \text{餘式} \quad (\text{其中 } 0 \leq \text{餘式次數} < \text{除式次數})$$

下面我們來舉幾道題目，了解在多項式範圍我們如何運用除法原理進行解題。

Ex 1：有一多項式除以 $2x - 3$ 得到商式為 $3x + 2$ ，餘式為 9，求此多項式。

Ex 2：若多項式 $2x^2 - ax - 4$ 能被 $x - 2$ 整除，求 $a = ?$

Ex 3：若多項式 $4x^2 - mx - 3$ 能被 $2x - 3$ 整除，求 $m = ?$

Ex 1：有一多項式除以 $2x - 3$ 得到商式為 $3x + 2$ ，餘式為 9 ，求此多項式。

解：

因為 被除式 = 除式 \times 商式 + 餘式

所以 多項式 = $(2x - 3) \times (3x + 2) + 9$

$$= 6x^2 + 4x - 9x - 6 + 9$$

$$= 6x^2 - 5x + 3$$

答： $6x^2 - 5x + 3$

Ex 2：若多項式 $2x^2 - ax - 4$ 能被 $x - 2$ 整除，求 $a = ?$

◎解題思維：

這道題目至少有兩種解法，第一種是用多項式除法直接進行計算。第二種是運用除法原理。比較特別的是第二種做法，也就是運用除法原理，來處理這道題目。我們可以假設 $2x^2 - ax - 4$ 除以 $x - 2$ ，所得到的商式為 Q ，餘式為 R 。所以可以利用除法原理

$$\text{被除式} = \text{除式} \times \text{商式} + \text{餘式}$$

列出下面的式子。

$$2x^2 - ax - 4 = (x - 2) \times Q + R$$

因為題目告訴我們 $2x^2 - ax - 4$ 能被 $x - 2$ 整除，所以餘式 $R=0$ 。

因此我們可以再進一步把式子改寫成

$$2x^2 - ax - 4 = (x - 2) \times Q$$

因為這是一個等式，代表不論 x 的值為多少，代入後等式都會成立。既然如此，我們可以代入 $x=2$ ，因為當 $x=2$ 時， Q 會乘上數字 0 。換句話說， Q 就會變不見了。我們就可以算出 a 了。

$$2x + (-a + 4)$$

解：法一

$$\begin{array}{r} x - 2 \overline{) 2x^2 - ax - 4} \\ \underline{2x^2 - 4x} \\ (-a + 4)x - 4 \\ \underline{(-a + 4)x - 2(-a + 4)} \\ -4 + 2(-a + 4) \end{array}$$

因為是整除所以餘式 $-4 + 2(-a + 4) = 0$ ，接著我們便可以解方程式

$-4 + 2(-a + 4) = 0$ 如下

$$-4 + 2(-a + 4) = 0$$

$$-4 - 2a + 8 = 0$$

$$4 - 2a = 0$$

$$-2a = -4$$

$$a = -4 \div (-2)$$

$$a = 2$$

解：法二：

因為多項式 $2x^2 - ax - 4$ 能被 $x - 2$ 整除，所以假設所得到的商式為 Q 。

又

$$\text{被除式} = \text{除式} \times \text{商式} + \text{餘式}$$

所以

$$2x^2 - ax - 4 = (x - 2) \times Q$$

令 $x=2$ ，代入上式，得到

$$8 - 2a - 4 = 0 \times Q$$

所以

$$4 - 2a = 0$$

$$a = 2$$

答： $a = 2$

Ex 3：若多項式 $4x^2 - mx - 3$ 能被 $2x - 3$ 整除，求 $m = ?$

解：

假設多項式 $4x^2 - mx - 3$ 除以 $2x - 3$ 得到商式為 Q

所以

$$4x^2 - mx - 3 = (2x - 3) \times Q$$

令 $x = \frac{3}{2}$ 代入上式

得到

$$4 \times \frac{9}{4} - \frac{3}{2}m - 3 = 0 \times Q$$

$$6 - \frac{3}{2}m = 0$$

$$-\frac{3}{2}m = -6$$

$$m = -6 \div \left(-\frac{3}{2}\right) = -6 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 4$$

答：m = 4

重點提問

依據課文的解釋，請你說明一下什麼是「除法原理」。

• 隨堂練習：

1. 有一多項式除以 $3x - 4$ 得到商式為 $2x + 1$ ，餘式為 -3 ，求此多項式。
2. 求出多項式 $x^{20} - 2x - 3$ 除以 $x + 1$ 的餘式。
3. 若多項式 $3x^2 + ax - 2$ 能被 $x - 2$ 整除，求 $a = ?$
4. 若多項式 $2x^2 + mx + 3$ 能被 $2x + 3$ 整除，求 $m = ?$

還是不太懂，請看下面影片



<https://www.youtube.com/watch?v=QOKgqcpeLk>