

單元二：多項式與其加減運算

課文 A：多項式

介紹完乘法公式後，接著我們要談的是「多項式」。

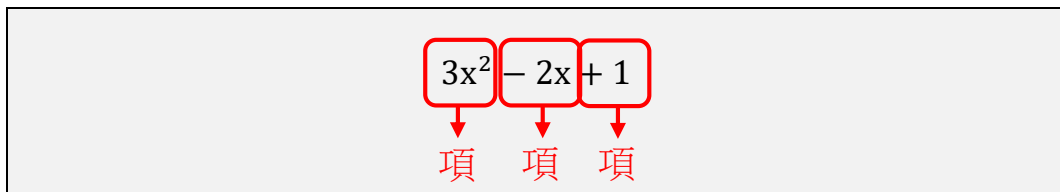
什麼是多項式呢？

如 $3x^2 - 2x + 1$ 和 $2x + 3$ 這樣的數學式，就稱作「 x 的多項式」。多項式是一種包含「變數」和「係數」的式子，並且只運用到加法、減法和乘法。

但是，當變數 x 出現在分母或絕對值時，就不屬於多項式，

如 $\frac{1}{x^2+2x-3}$ 和 $|2x^2 - 3x + 5|$ 。

而既然稱作「多項式」代表是由很多「項」所構成，以 $3x^2 - 2x + 1$ 來說，就包含 $3x^2$ 、 $-2x$ 和 $+1$ 三項，如下圖

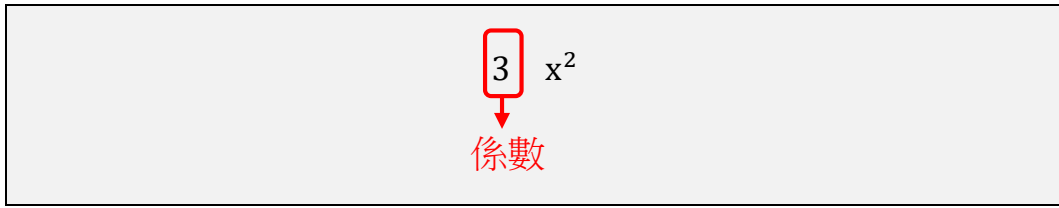


※項與係數

多項式由許多「項」組成，這些不同的「項」，各有不同的名稱，每個

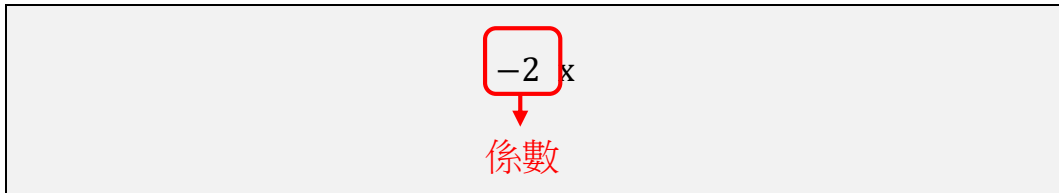
「項」裡又包含了「係數」。

以 $3x^2$ 這一項來說，因為 x 的次數為二次方，所以我們稱它為「二次項」，而 3 則是它的「係數」。


$$\boxed{3} x^2$$

↓
係數

再以 $-2x$ 這一項來說，因為 x 的次數為一次方，所以我們稱它為「一次項」，而 -2 則是它的「係數」。


$$\boxed{-2} x$$

↓
係數

而最後一項 $+1$ ，乍看之下似乎沒有任何的變數 x ，但其實它的項式是 x^0 （ x 的 0 次方），也就是 $+1$ 代表 $+1x^0$ ，所以我們稱它為「零次項」，而因為任何數的 0 次方都等於 1 （除了 0 以外），所以我們把 $+1x^0$ 簡寫成 $+1$ ，由於它是一個固定不變的數，所以我們又稱它為「常數項」，並說這個多項式的常數項為 $+1$ 。

※次數與項數

一個多項式所有「項」中的最高次方，我們稱作這個多項式的「次數」。

。比方說，多項式 $2x^2 - 3x + 1$ 中，總共有 $2x^2$ 、 $-3x$ 和 $+1$ 三個項，其中的最高次方數是 2 次方（即 $2x^2$ 項的次方數），所以我們稱這個多項式為「二次多項式」。而因為它有三個項，所以它的「項數」為 3 。當一個多項式項數為 1 時，我們叫做「單項式」，如 $5x^2$ 或 $-4x$ 。

如果一個單項式是一個不是 0 的常數時，如 -7 ，因為它的最高次方數是 0 次方（即 $-7 = -7x^0$ ），所以我們稱它為「零次多項式」。

上面我們提到，如果單項式是一個不是 0 的常數時，我們稱它為「零次多項式」。換句話說，0 並不是「零次多項式」，因為 0 可能代表 0 乘以任何的項式，如 $0x^8$ 、 $0x^2$ ，因此 0 並不是「零次多項式」。

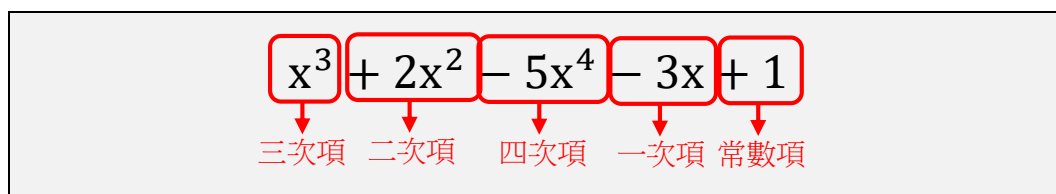
那麼 0 是不是一個多項式呢？

雖然 0 不是「零次多項式」，但 0 確實也是一個多項式。

由於我們從小認識的 0，竟然不只是數字，也是一個「多項式」，所以我們給它取一個專屬的名字叫做「零多項式」。

※降冪與升冪

一個多項式是由許多「項」組成，每一項都有它的次數，我們怎麼去排列這些項呢？我們舉一個四次多項式 $x^3 + 2x^2 - 5x^4 - 3x + 1$ 為例。它總共有 5 項，分別是 x^3 、 $+2x^2$ 、 $-5x^4$ 、 $-3x$ 和 $+1$ 。如下圖



你有沒有發現，如果以各項的次數來說，這 5 項的排列是沒有按照次方大小順序的。它的排列順序是三次項→二次項→四次項→一次項→常數項（零次項）。

如果我們要依各項次數大小順序來排，就可以有兩種排法，第一是由小至大，也就是常數項（零次項）→一次項→二次項→三次項→四次項。

排出來就是

$$1 - 3x + 2x^2 + x^3 - 5x^4$$

這樣的排列方式我們叫做「升冪」。「冪」指的就是次方，因此升冪就是按照各項的次數由低至高進行排列。

第二種則是由大至小，也就是四次項→三次項→二次項→一次項→常數項（零次項）。排出來就是

$$-5x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

這樣的排列方式我們叫做「降冪」。也就是按照各項的次數由高至低進行排列。

升冪和降冪都是按照各項的次數進行排列，其中降冪排列是我們比較常用的方式。

下面我們就來做一些題目，練習上面的觀念。

Ex 1：判斷下面式子是不是多項式，並且在□內打勾。

式子	是否為多項式	式子	是否為多項式
$2x^2 - 5x$	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1$	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否
3	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否	$ x^2 - 3x + 1 $	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否
$-x^2 + \frac{1}{2}x$	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否	0	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否

Ex 2：下面選項(A)到(F)都是 x 的多項式，依據下面的問題，填入適當的代碼

- (A) $2x^2 + 3x + 1$ (B) 0 (C) $-4x^2 - 2$
 (D) $2x$ (E) $-\frac{3}{5}$ (F) $\frac{1}{2}x + 1$

(1) 哪些是二次多項式？_____

(2) 哪些是一次多項式？_____

(3) 哪些是單項式？_____

(4) 哪些是零次多項式？_____

(5) 哪些是零多項式？_____

Ex 3：依據下列各多項式完成下列表格

多項式	次數	二次項係數	一次項係數	常數項
$-2x^3 - 5x^2 + x - 1$				
$3x - 5$				
$-\frac{2}{3}$				

Ex 4：請將多項式 $8 - 2x^2 - 5x - 2x^3$ ，分別依升冪和降冪排列。

Ex 5：已知 $(a - 5)x^3 - (b + 2)x^2 - (a + b - 5)x + (a - b + 3)$ 為一次多項式，求 a、b 的值與原多項式。

Ex 1：判斷下面式子是不是多項式，並且在□內打勾。

式子	是否為多項式	式子	是否為多項式
$2x^2 - 5x$	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1$	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否
3	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否	$ x^2 - 3x + 1 $	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否
$-x^2 + \frac{1}{2}x$	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否	0	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否

解：

因為當文字符號 x 出現在分母或絕對值時，就不屬於多項式，所以

$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1$ 和 $|x^2 - 3x + 1|$ 都不是多項式。而 $2x^2 - 5x$ 、3、 $-x^2 + \frac{1}{2}x$ 和

0 都是多項式。

Ex 2：下面選項(A)到(F)都是 x 的多項式，依據下面的問題，填入適當的代碼

(A) $2x^2 + 3x + 1$ (B) 0 (C) $-4x^2 - 2$

(D) $2x$ (E) $-\frac{3}{5}$ (F) $\frac{1}{2}x + 1$

(1) 哪些是二次多項式？_____

(2) 哪些是一次多項式？_____

(3) 哪些是單項式？_____

(4) 哪些是零次多項式? _____

(5) 哪些是零多項式? _____

解：

(1) 二次多項式代表最高次方是二次，所以(A)、(C)都是二次多項式。

(2) 一次多項式代表最高次方是一次，所以(D)、(F)都是一次多項式。

(3) 單項式代表只有一項，所以(B)、(D)、(E)都是單項式。

(4) 零次多項式指的是一個不為 0 的常數，所以(E)都零次多項式。

(5) 零多項式指的就是 0，所以答案是(B)。

Ex 3：依據下列各多項式完成下列表格

多項式	次數	二次項係數	一次項係數	常數項
$-2x^3 - 5x^2 + x - 1$				
$3x - 5$				
$-\frac{2}{3}$				

解：

多項式	次數	二次項係數	一次項係數	常數項
$-2x^3 - 5x^2 + x - 1$	3	-5	1	-1
$3x - 5$	1	0	3	-5
$-\frac{2}{3}$	0	0	0	$-\frac{2}{3}$

解：

當多項式不包含每一項式時，我們稱那一項的係數為 0。如 $3x - 5$ 並不包含二次項，所以我們說多項式 $3x - 5$ 的二次項係數為 0。

Ex 4：請將多項式 $8 - 2x^2 - 5x - 2x^3$ ，分別依升冪和降冪排列。

解：

升冪排列： $8 - 5x - 2x^2 - 2x^3$

降冪排列： $-2x^3 - 2x^2 - 5x + 8$

Ex 5：已知 $(a - 5)x^3 - (b + 2)x^2 - (a + b - 5)x + (a - b + 3)$ 為一次多項式，求 a 、 b 的值與原多項式。

解：

因為 $(a - 5)x^3 - (b + 2)x^2 - (a + b - 5)x + (a - b + 3)$ 為一次多項式

所以三次方項 $(a - 5)x^3$ 與二次方項 $-(b + 2)x^2$ 應該都為 0

故三次方項係數 $a - 5 = 0$ ，且二次方項係數 $-(b + 2) = 0$

所以 $a = 5$ 、 $b = -2$

代入原多項式，得到

$$\begin{aligned} -(a + b - 5)x + (a - b + 3) &= -[5 + (-2) - 5]x + [5 - (-2) + 3] \\ &= 2x + 10 \end{aligned}$$

重點提問

在這一個段落裡，我們介紹了很多跟多項式有關的概念，包括什麼是多項式、項、係數、項的次數、多項式的次數和項數、單項式、零次多項式、常數項、零多項式、升冪和降冪等。

你對這些概念熟悉嗎？

請你參考課文的說明，完成下面的問答，並舉例說明

1. 什麼是「項」？
2. 什麼是「係數」？
3. 什麼是「項的次數」？
4. 什麼是「多項式的次數」？

5. 什麼是「零次多項式」？

6. 什麼是「常數項」？

7. 什麼是「零多項式」？

8. 什麼是「升冪和降冪」？

• 隨堂練習：

1. 判斷下面式子是不是多項式，並且在□內打勾。

式子	是否為多項式	式子	是否為多項式
$3x^2 + 2x$	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否	$\frac{1}{x^2 + 2x - 1}$	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否
$-\frac{3}{5}$	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否	$ 2x + 1 $	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否
$\frac{x}{3}$	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否	0	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否

2. 下面選項(A)到(F)都是 x 的多項式，依據下面的問題，填入適當的代碼

(A) $-3x^2$ (B) 0 (C) $2x^2 - 2$

(D) $2x - 3$ (E) $-\frac{3}{5}$ (F) $\frac{1}{3}x + 2$

(1) 哪些是二次多項式？_____

(2) 哪些是一次多項式？_____

(3) 哪些是單項式？_____

(4) 哪些是零次多項式？_____

(5) 哪些是零多項式？_____

3. 依據下列各多項式完成下列表格

多項式	次數	二次項係數	一次項係數	常數項
$3x^4 + 2x - 1$				
$x - 3$				
2				

4. 請將多項式 $3x^2 - 2x^4 + 8 - 5x - 2x^3$ ，分別依升冪和降冪排列。

5. 已知 $(a + 2)x^3 - (b - 3)x^2 - (a + b - 2)x + (a - b + 1)$ 為一次多項式，求 a 、 b 的值與原多項式。

1.多項式(項與係數)	2.多項式(2)	3 多項式(例 1~例 6)
 https://www.youtube.com/watch?v=RJd-FsJQPvc	 https://www.youtube.com/watch?v=zofdnGwo6IE	 https://www.youtube.com/watch?v=cGaX2ZAwPOI

課文 B：多項式的加減

介紹完什麼是多項式後，接下來我們就要學習對多項式做加、減、乘、除的四則運算了。

首先我們要來做多項式的加減。

與其說多項式的加減是加減運算，倒不如說是做「同類項合併」。

什麼是「同類項」呢？

多項式中次方相同的項我們就稱為同類項，像是 $2x^2$ 和 $-3x^2$ 都是二次方項，所以 $2x^2$ 和 $-3x^2$ 就是「同類項」。而 $-2x^2$ 和 $3x^3$ ，一個是二次項、一個是三次項，次數不同，所以就不是「同類項」。

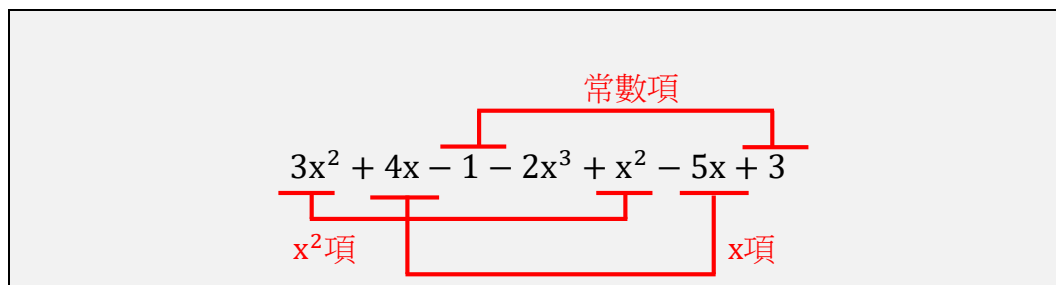
同類項怎麼合併呢？

我們用一個例子來看看。

Ex 1：化簡多項式 $3x^2 + 4x - 1 - 2x^3 + x^2 - 5x + 3$

◎解題思維：

在這道題目裡，有三組同類項，分別是 x^2 項、 x 項和常數項。如下圖



我們可以將這三組同類項分別合併。如下

$$x^2 \text{ 項} : 3x^2 + x^2 = 4x^2$$

$$x \text{ 項} : +4x - 5x = -x$$

$$\text{常數項} : -1 + 3 = +2$$

另外 x^3 項只有 $-2x^3$ ，沒有同類項可以跟它合併，所以維持不變。

$$\text{解} : 3x^2 + 4x - 1 - 2x^3 + x^2 - 5x + 3$$

$$= -2x^3 + 3x^2 + x^2 + 4x - 5x - 1 + 3$$

$$= -2x^3 + 4x^2 - x + 2$$

從上面的例子中，我們介紹了同類項合併的做法，下面就讓我們來看一些多項式加減的例子。

$$\text{Ex 2 : 計算 } (x^2 + 3x - 2) + (-2x^2 - 5x + 1)$$

$$\text{Ex 3 : 計算 } (-x^2 + 2x + 3) - (3x^2 - 2x + 1)$$

Ex 2：計算 $(x^2 + 3x - 2) + (-2x^2 - 5x + 1)$

解：

$$\begin{aligned} & (x^2 + 3x - 2) + (-2x^2 - 5x + 1) \\ &= x^2 + 3x - 2 - 2x^2 - 5x + 1 \\ &= x^2 - 2x^2 + 3x - 5x - 2 + 1 \\ &= -x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

先依照去括號規則把
括號去掉！

Ex 3：計算 $(-x^2 + 2x + 3) - (3x^2 - 2x + 1)$

解：

$$\begin{aligned} & (-x^2 + 2x + 3) - (3x^2 - 2x + 1) \\ &= -x^2 + 2x + 3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ &= -x^2 - 3x^2 + 2x + 2x + 3 - 1 \\ &= -4x^2 + 4x + 2 \end{aligned}$$

重點提問

請你依據課文的說明，解釋一下什麼叫作「同類項」？並以 $2x^2 + 3x - 5 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ 為例，寫出所有的同類項。

• 隨堂練習：

1. 化簡多項式 $-5x^2 + 2x - 1 - 2x^3 + 4x^2 - 5x - 3$
2. 計算 $(2x^2 + x - 3) + (-x^2 - 2x + 5)$
3. 計算 $(-x^2 - 2x - 5) - (x^2 - 3x - 4)$

還是不太懂，請看下面影片



課文 C：多項式加減的進階應用

Ex 1：計算下列各式，並用降幕排列

$$(1) \quad (-2x^3 + 5x) + (-2x - 5x^2 + 7) - (x^3 - 3x^2 + 5)$$

$$(2) \quad (2x^3 + 3x^2 - 5x + 7) - [(4x^3 + 5x) - (2x^2 - 3x - 4)]$$

解：(1) $(-2x^3 + 5x) + (-2x - 5x^2 + 7) - (x^3 - 3x^2 + 5)$

$$= -2x^3 + 5x - 2x - 5x^2 + 7 - x^3 + 3x^2 - 5$$

$$= -2x^3 - x^3 - 5x^2 + 3x^2 + 5x - 2x + 7 - 5$$

$$= -3x^3 - 2x^2 + 3x + 2$$

解：(2) $(2x^3 + 3x^2 - 5x + 7) - [(4x^3 + 5x) - (2x^2 - 3x - 4)]$

$$= (2x^3 + 3x^2 - 5x + 7) - (4x^3 + 5x - 2x^2 + 3x + 4)$$

$$= (2x^3 + 3x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 2x^2 + 8x + 4)$$

$$= 2x^3 + 3x^2 - 5x + 7 - 4x^3 + 2x^2 - 8x - 4$$

$$= 2x^3 - 4x^3 + 3x^2 + 2x^2 - 5x - 8x + 7 - 4$$

$$= -2x^3 + 5x^2 - 13x + 3$$

Ex 2：化簡 $(ax^2 - 3x + 2) - (x^2 - bx + c)$ 後會得到 $2x - 5$ 則 a 、 b 、 c 的值各為何？


解：

$$\begin{aligned} & \text{因為 } (ax^2 - 3x + 2) - (x^2 - bx + c) \\ &= ax^2 - 3x + 2 - x^2 + bx - c \\ &= (a - 1)x^2 + (b - 3)x + 2 - c \\ &= 2x - 5 \end{aligned}$$

比較係數後可以知道 $a - 1 = 0$ 、 $b - 3 = 2$ 、 $2 - c = -5$

故 $a = 1$ 、 $b = 5$ 、 $c = 7$

Ex 3：曉華做一道數學題如下：

A、B 為兩多項式， $A = 3x^2 - 4x + 5$ ， $B =$  求 $A + B$ 。

結果他將 $A + B$ 看錯成 $A - B$ ，並算出答案 $x^2 - 2x + 1$ 。

若題目的 B 已經污損，請你試著用他算出來的結果，找出原來的 B，並幫他算出正確答案。

解：

因為小華實際上算的是 $A - B$ ，並且作出答案 $x^2 - 2x + 1$

所以我們可以列出式子如下

$$(3x^2 - 4x + 5) - B = x^2 - 2x + 1$$

所以

$$\begin{aligned} -B &= x^2 - 2x + 1 - (3x^2 - 4x + 5) \\ &= x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 4x - 5 \\ &= -2x^2 + 2x - 4 \end{aligned}$$

兩邊同乘以 -1 ，得到

$$B = 2x^2 - 2x + 4$$

故

$$\begin{aligned} A + B &= (3x^2 - 4x + 5) + (2x^2 - 2x + 4) \\ &= 3x^2 - 4x + 5 + 2x^2 - 2x + 4 \\ &= 5x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

答： $B = 2x^2 - 2x + 4$ ，正確答案為 $5x^2 - 6x + 9$

• 隨堂練習：


1. 計算下列各式，並用降冪排列

(1) $(-x^3 + 4x) + (-3x - 3x^2 + 5) - (x^3 - 2x^2 + 3)$

(2) $(3x^3 + 5x^2 - 7x + 9) - [(2x^3 + 3x) - (5x^2 - x - 4)]$

2. 化簡 $(ax^2 - x + 3) - (2x^2 + bx - c)$ 後會得到 $3x - 4$ 則 a 、 b 、 c 的值各為何？

3. 曉華做一道數學題如下：

A、B 為兩多項式， $A = 2x^2 - x + 3$ ， $B =$  求 $A+B$ 。

結果他將 $A+B$ 看錯成 $A-B$ ，並算出答案 $2x^2 - 3x + 5$ 。

若題目的 B 已經污損，請你試著用他算出來的結果，找出原來的 B ，並幫他算出正確答案。

還是不太懂，請看下面影片



<https://www.youtube.com/watch?v=JmfuhSZnOlo>