單元三：等差級數

課文 A：等差級數

回顧一下，數列就是將一串數依序排成一列，

例如小芳紀錄這禮拜星期一到星期日的早餐錢(單位:元)依序為：

55 , 45 , 50 , 60 , 65 , 55 , 75，這就是一個數列。

■級數

如果小芳想計算這星期總共花了多少早餐錢，

計算方式就是將每一天所花的早餐錢都加起來：

$$55 + 45 + 50 + 60 + 65 + 55 + 75$$

這就是一種**級數**。

而級數的首項、末項、項數其實就跟數列一樣的。以這個級數來說，

第1項(首項) a_1 就是 55 、第2項 a_2就是 45、…、第7項 a_7(也是這個級數的末項)就是 75 ，而項數$n = 7$。

$55 + 45 + 50 + 60 + 65 + 55 + 75 = 405$，405 就是這個級數的和。

簡單來說，將數列的每一項用"＋"連接，就稱為級數。

■$\boxed{\text{等差級數}}$

再舉一個例子，古代的落地鐘為了方便提醒時間，

在 1 點的時候會敲 1 下鐘聲、2 點的時候會敲 2 下鐘聲、3 點的時候會敲 3 下鐘聲，以此類推到 12 點。

從 1 點到 12 點將每小時敲的鐘聲數紀錄如下：

1, 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12

仔細觀察，「$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$」，相鄰兩項差都是 1，

這是一個等差數列。

想計算從 1 點到 12 點總共敲了幾聲：

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12$

就是一個等差級數。

而這個等差級數的首項$a_1=1$、第12項a_{12}(剛好是這個級數的末項)$=12$、項數$\mathrm{n}=12$、公差$\mathrm{d}=1$。

簡單來說，將等差數列的每一項用“＋”連接，就稱為**等差級數**。

由這個例子來說，從 1 點到 12 點總共敲了幾聲直接計算就好了：

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78$，

總共 78 聲。78 就是**等差級數的和。**

這個等差級數的項數很少，所以要計算等差級數的和非常容易，直接計算就可以了，但是如果當一個等差級數的項數非常多時怎麼辦呢？

■**高斯的故事**

傳說數學家高斯在 10 歲時，老師在數學課上出了一道題目：

$$1+2+3+\cdots+99+100=?$$

給學生計算，老師想趁學生做題時可以休息一下，

但不到幾秒鐘，高斯就舉手說出答案是 5050，

讓老師吃了一驚。高斯是用什麼方法算出來的呢？

仔細看一下，高斯老師所出的題目：「$1+2+3+\cdots+99+100=?$」，

這其實就是在求等差級數的和，但是有非常多項，有 100 項，

這如果慢慢算的話就會非常的辛苦，讓我們來看一下高斯的做法吧！

高斯先將級數按照順序排列，$1+2+3+\cdots+98+99+100=$

再將級數排序整個反過來排，$100+99+98+\cdots+3+2+1=$

只是順序反過來而已，所以這兩級數和會是一樣的，假設它等於 S。

然後將它們相加：

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
 & \boxed{1} & + & \boxed{2} & + & \boxed{3} & + & \cdots & + & \boxed{98} & + & \boxed{99} & + & \boxed{100} & = S \\
+) & \boxed{100} & + & \boxed{99} & + & \boxed{98} & + & \cdots & + & \boxed{3} & + & \boxed{2} & + & \boxed{1} & = S \\
\hline
 & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 & + & 101 & = 2S
\end{array}$$

上下對應相加會發現：

1 加上 100 等於 101、2 加上 99 等於 101、3 加上 98 等於 101、…、

98 加上 3 等於 101 、 99 加上 4 等於 101 、 100 加上 1 等於 101，

都是 101 。

也就是會有 100 組的 101 ， 100×101 ，

而這是兩組相同等差級數相加的 ，

所以等差級數的和就是 $\frac{100\times101}{2} = 5050$ 。

讓我們利用高斯的想法來計算看看「$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$」

這個等差級數。

所以

$$
\begin{array}{rccccccccccccc}
 & & +3 & & +3 & & +3 & & +3 & & +3 & & +3 & \\
S = & \boxed{1} & + & \boxed{4} & + & \boxed{7} & + & \boxed{10} & + & \boxed{13} & + & \boxed{16} & + & \boxed{19} \\
+)\ S = & 19 & + & 16 & + & 13 & + & 10 & + & 7 & + & 4 & + & 1 \\
 & & -3 & & -3 & & -3 & & -3 & & -3 & & -3 & \\
\hline
2S = & 20 & + & 20 & + & 20 & + & 20 & + & 20 & + & 20 & + & 20
\end{array}
$$

發現每一對都是 20 ，都跟首項加末項的值一樣，總共會有 7 對：

$2S = (1 + 19) \times 7$，所以這個等差級數的和 $S = \frac{(1+19)\times7}{2} = 70$ 。

<u>高斯</u>的作法可以推廣到任意的等差級數，我們也將這個結果化為求等

差級數和的公式！

有一個 n 項的等差級數：$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$ 其和為 $\mathrm{S_n}$，

所以可以列式成：

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n\text{，}$$

再將整個級數反過來排序，和也會一樣：

$$\mathrm{S_n}=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_3+a_2+a_1$$

然後將它們相加：

$$\begin{array}{rrcccccccc}
 & S_n= & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & +\cdots+ & a_{n-2}+ & a_{n-1} & +a_n \\
+) & S_n= & a_n & + & a_{n-1} & + & a_{n-2} & +\cdots+ & a_3+ & a_2 & +a_1 \\
\hline
\end{array}$$

因為是等差級數，所以這個級數有對稱性的感覺，所以

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-2}+a_3+a_{n-3}=a_4+a_{n-4}=a_5+a_{n-5}=\cdots$$

因此，每一對相加都會與 (a_1+a_n) 相等：

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
\mathrm{S_n}= & \boxed{a_1} & + & \boxed{a_2} & + & \boxed{a_3} & +\cdots+ & \boxed{a_{n-2}} & + & \boxed{a_{n-1}} & + & \boxed{a_n} \\
+)\ \mathrm{S_n}= & \boxed{a_n} & + & \boxed{a_{n-1}} & + & \boxed{a_{n-2}} & +\cdots+ & \boxed{a_3} & + & \boxed{a_2} & + & \boxed{a_1} \\
\hline
2\mathrm{S_n}= & \boxed{a_1+a_n} & + & \boxed{a_1+a_n} & + & \boxed{a_1+a_n} & +\cdots+ & \boxed{a_1+a_n} & + & \boxed{a_1+a_n} & + & \boxed{a_1+a_n}
\end{array}$$

總共會有 n 對的 (a_1+a_n)：$2S_n=(a_1+a_n)\times n$

所以這個等差級數的和 $S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$，這就是等差級數和的公式！

n 項等差級數和　首項　末項（也是第n項）　項數

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$$

我們來作以下 5 個等差級數相關的例題。

Ex1. 等差級數 $18+21+\cdots+78$ 共有 21 項，求此等差級數的和。

◎解題思維與解答：

從求等差級數和的公式$S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$，

要利用這個公式需要知道首項 $a_1=18$ 、末項 $a_{\mathrm{n}}=78$、

項數 $n=21$，而目前這些都知道了，

所以 $S_{21}=\frac{(18+78)\times 21}{2}$

$$=\frac{\cancel{96}^{48}\times 21}{\cancel{2}}=1008$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times\ \ 21 \\ \hline 48 \\ 96\ \, \\ \hline 1008 \end{array}$$

Ex2. 等差級數 $(-2)+2+6+\cdots+90$ ，求此等差級數的和。

◎解題思維與解答：

從求等差級數和的公式 $S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$，

要利用這個公式需要知道首項a_1、末項 a_n 、項數 n 。

而目前知道首項 $a_1=-2$，末項 $a_n=90$ ，

所以需要先想辦法求出項數 n 。

利用 $a_n=a_1+(n-1)d$ 來求，

將首項 $a_1=-2$、末項 $a_n=90$ 、公差 $d=4$ 代入，得到

$$90=(-2)+(n-1)\times(4)$$

$$\Rightarrow 90=-2+4n-4$$

$$\Rightarrow 90=-6+4n$$

$$\Rightarrow 90+6=4n$$

$$\Rightarrow 96=4n$$

$$\Rightarrow n=24$$

所以項數 $\mathrm{n}=24$ ，首項 $a_1=-2$、末項 $a_n=90$

代入等差級數和的公式：$S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$ ，

所以 $S_{24}=\frac{[90+(-2)]\times 24}{2}=\frac{\cancel{88}^{44}\times 24}{\cancel{2}}=1056$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times\ \ 24 \\ \hline 176 \\ 88\ \ \\ \hline 1056 \end{array}$$

Ex3. 一等差級數的首項 63，末項 -93，和 -600，求其項數和公差。

◎解題思維與解答：

目前知道首項 $a_1=63$，假設有 n 項，末項就是 $a_n=-93$，

和為 $S_n=-600$，代入等差級數和公式「$S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$」

$$-600=\frac{[63+(-93)]n}{2}$$

$$\Rightarrow -600=\frac{\overset{-15}{\cancel{-30}}\,n}{\cancel{2}}=-15n$$

$$\Rightarrow n=(-600)\div(-15)=40$$

有首項 $a_1=63$、項數 $n=40$、末項 $a_n=-93$，要求公差 d，

可以利用代入「$a_n=a_1+(n-1)d$」：

$$-93=63+(40-1)d$$

$$\Rightarrow -93=63+39d$$

$$\Rightarrow -93-63=39d$$

$$\Rightarrow -156=39d$$

$$\Rightarrow d=(-156)\div 39=-4$$

Ex4. 一等差級數 $3+(-1)+(-5)+\cdots$ ，求

(1)此等差級數前 12 項的和。　　(2)此等差級數前 20 項的和。

◎解題思維與解答：

(1) 要求前 12 項的和，也就是 S_{12} 。

由求等差級數和的公式：$S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$，

要利用這個公式需要首項a_1、末項 a_{n} 、項數 n 。

而目前知道首項 $a_1=3$，項數 $n=12$，所以還需要先求出 $a_{12}=?$。

要知道a_{12}，可以利用$a_n=a_1+(n-1)d$ 來求：

$a_{12}=3+(12-1)\times(-4)=3+11\times(-4)=3-44=-41$

代入等差級數和的公式：$S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$ ，

所以 $S_{12}=\frac{[3+(-41)]\times 12}{2}=\frac{(-38)\times \cancel{12}^{6}}{\cancel{2}}=-228$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times\ 6 \\ \hline 48 \\ 18 \\ \hline 228 \end{array}$$

(2) 要求前 20 項的和，也就是 S_{20} 。

由求等差級數和的公式：$S_n = \frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$，

要利用這個公式需要首項a_1、末項 a_n 、項數 n 。

而目前知道首項 $a_1 = 3$，項數 $n = 20$，所以還需要先求出 a_{20} =?。

要知道a_{20}，可以利用$a_n = a_1 + (n-1)d$ 來求：

$a_{20} = 3 + (20-1)\times(-4) = 3 + 19\times(-4) = 3 - 76 = -73$

代入等差級數和的公式：$S_n = \frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$，

所以 $S_{20} = \frac{[3+(-73)]\times 20}{2} = \frac{(-70)\times \cancel{20}^{10}}{\cancel{2}} = -700$

如果有了一個等差級數的前幾項，

例如 Ex4：知道一等差級數「 $3+(-1)+(-5)+\cdots$ 」，

就可以求前 12 項和 S_{12}、前 20 項和 S_{20} ，甚至可以求前 n 項和 S_n 。

但是因為給的資訊都沒有末項，所以都要先求出末項，才可以利用

「 $S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$ 」這個公式求出前 n 項的和。

■**這裡要提到另外一個求等差級數和的公式**，可以省略需要求出末項

這個步驟。

末項是利用「 $a_n=a_1+(n-1)d$ 」這個公式求出的，

所以就可以將這個公式代入等差級數和的公式「 $S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$ 」中：

$$S_n=\frac{\{a_1+[a_1+(n-1)d]\}\times n}{2}=\frac{[2a_1+(n-1)d]\times n}{2}$$

這樣就只需要知道首項a_1、項數 n 、公差 d ，不需要知道末項就可以

將前 n 項的和求出來了！

讓我們利用 Ex4 來練習一下「$S_n=\frac{[2a_1+(n-1)d]\times n}{2}$」這個公式，

「$3+(-1)+(-5)+\cdots$」，等差級數的首項$a_1=3$，

公差 $d=(-1)-3=-4$，

要求S_{12}，也就是n = 12

$$S_{12}=\frac{[2\times 3+(12-1)\times(-4)]\times 12}{2}=\frac{[6+11\times(-4)]\times 12}{2}$$
$$=\frac{(6-44)\times 12}{2}=\frac{(-38)\times \cancel{12}^{6}}{\cancel{2}}=-228$$

要求S_{20}，也就是n = 20

$$S_{20}=\frac{[2\times 3+(20-1)\times(-4)]\times 20}{2}=\frac{[6+19\times(-4)]\times 20}{2}$$
$$=\frac{(6-76)\times 20}{2}=\frac{(-70)\times \cancel{20}^{10}}{\cancel{2}}=-700$$

■公式的比較

現在求等差級數的和有兩種公式：

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2} \text{ 、 } S_n=\frac{[2a_1+(n-1)d]\times n}{2}$$

這兩種公式有不同的使用時機，我們來比較一下！

「$S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$」這個公式，主要有 4 種數量關係：

首項 a_1、末項 a_n、項數 n 、級數和 $\mathrm{S_n}$

「$S_n=\frac{[2a_1+(n-1)d]\times n}{2}$」這個公式，主要有 4 種數量關係：

首項 a_1、公差 d、項數 n 、級數和 $\mathrm{S_n}$

仔細看一下，最大的差別就是一個是跟末項 a_n 有關的公式；另一個是一個是跟公差 d 有關的公式。

所以知道首項 a_1、末項 a_n、項數 n ，求級數和 $\mathrm{S_n}$，

就可以使用「$S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$」；

而知道首項 a_1、公差 d、項數 n ，求級數和 $\mathrm{S_n}$，

則是可以使用「$S_n=\frac{[2a_1+(n-1)d]\times n}{2}$」。

Ex5. 一等差級數 $3+4+5+\cdots$ 前 n 項和為 75 ，求 $n=$？

◎解題思維與解答：

從此等差級數「$3+4+5+\cdots$」可以得知首項 $a_1=3$、

公差 $d=4-3=1$ ，而且前 n 項和 $S_n=75$ ，要求項數 $n=$？

題目沒有很明顯的提到末項a_n ，所以不會選擇「$S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$」這個公式，會選擇另外一個公式「 $S_n=\frac{[2a_1+(n-1)d]\times n}{2}$」。

知道首項 $a_1=3$、公差 $d=1$ 、前 n 項和 $S_n=75$，要求出項數 n ，

將這些代入「 $S_n=\frac{[2a_1+(n-1)d]\times n}{2}$」：　$75=\frac{[2\times3+(n-1)\times1]\times n}{2}$

這式子看起來很複雜，沒關係，我們慢慢整理！

$$75=\frac{[2\times3+(n-1)\times1]\times n}{2}$$

$\Rightarrow\ 75=\frac{(6+n-1)\times n}{2}$

$\Rightarrow\ 75=\frac{(n+5)\times n}{2}$

$\Rightarrow\ 75\times2=(n+5)\times n$

$\Rightarrow\ 150=n^2+5n\ \Rightarrow\ n^2+5n-150=0$

$n \quad +15$

$n \quad -10$

$+15n-10n=+5n$

利用十字交乘法：前面 n^2拆成$n\times n$、後面 -150拆成$15\times(-10)$，造出中間$+5n$

$\Rightarrow\ (n+15)(n-10)=0\ \Rightarrow\ n=10\ or\ -15$

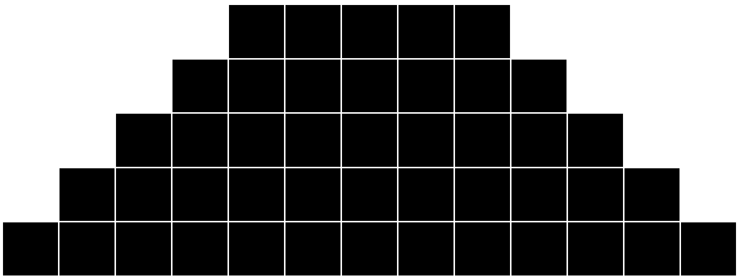
(-15不合，因為項數不會是負的)

閱讀重點提問

1. 根據上面的課文，請用自己的話解釋「等差級數」並舉例，再找出這個例子當中的首項、末項、公差、項數、級數和。

2. 請利用<u>高斯</u>計算「$1+2+3+\cdots+99+100=$？」的方法，計算 $32+38+44+50+56+62+68=$？

3. 下圖為快遞公司堆疊的快遞箱子，請根據圖形的規律，利用等差級數的想法計算總共有多少個箱子。



4. 請寫出求等差級數和的兩種公式，並比較這兩種公式。

5. 根據上面的課文，利用等差級數和的公式來解的題目可以分成哪幾類？

• 隨堂練習：

1. 等差級數 $20+24+\cdots+80$ 共有 11 項，求此等差級數的和。

2. 等差級數 $(-15)+(-5)+5+\cdots+85$ ，求此等差級數的和。

3. 一等差級數的首項 38 ，末項 -13 ，和 275，求其項數和公差。

4. 一等差級數 $90+88+86+\cdots$ ，求此等差級數前 21 項的和。

5. 一等差級數 $(-3)+(-1)+1+3+\cdots$ 前 n 項和為 135 ，求 $n=$？

還是不太懂，
等差級數求和的公式說明
請看下面影片

https://youtu.be/jmXGDi-1b0A

還是不太懂，
等差級數求和
第二個公式的說明
請看下面影片

還是不太懂~例 1~2，
請看下面影片

https://youtu.be/1uXoTQVw0_M

還是不太懂~例 3~4，
請看下面影片

https://youtu.be/88frtEk4PZ4

單元三：等差級數

課文 B：等差級數的應用

學完等差數列與級數後，生活當中有一些規律跟等差數列與級數有關，那麼就可以利用等差數列與級數的概念去進行解題。

在解決應用問題的時候，首先要先理解題目的意思，找出想要求的目標及題目所提供的條件，再根據條件對應相關的元素：a_1、a_n、d、n、S_n，列出關係方程式，最後進行解方程式解出所求。

我們來看以下 4 個例題。

Ex1.請計算 1 到 100 之間，所有能被 3 整除的數字和。

◎解題思維與解答：

依照題意列出來最小是 $3 \times 1 = 3$、再來是 $3 \times 2 = 6$、$3 \times 3 = 9$、$3 \times 4 = 12$ 、…、直到 $3 \times 33 = 99$，寫成數列為：$3,6,9,12,\ldots,99$。

仔細觀察一下這個數列，就會發現它是一個等差數列。

它的首項 $a_1 = 3$、末項是 99，總共有 33 個，所以項數 $n = 33$ 。

有了首項、末項、項數、公差，代入求級數和的公式

$S_n = \frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$」，得到 $S_n = \frac{(3+99)\times 33}{2} = \frac{\overset{51}{\cancel{102}} \times 33}{\cancel{2}} = 1683$

$$\begin{array}{r} 51 \\ \times\ 33 \\ \hline 153 \\ 153 \\ \hline 1683 \end{array}$$

Ex2. 瑞穗國中的育樂館第一排有 28 個座位，

之後每一排比前一排多 2 個座位，已知最後一排共有 76 個座位，則

(1)育樂館的座位共有多少排?　　(2)又共有多少個座位?

◎解題思維與解答：

我們將第一排的 28 個座位當作首項，即$a_1 = 28$；

最後一排的 76 個座位當作末項，

第一個問題是想問這個育樂館有幾排，其實就是在問項數 n。利用

「$a_{\mathrm{n}} = a_1 + (n-1)d$」，可得

$$76 = 28 + (n-1) \times 2$$

$$\Rightarrow\ 76 = 28 + 2n - 2$$

$$\Rightarrow\ 50 = 2n$$

$$\Rightarrow\ n = 25$$

所以育樂館總共有 25 排座位。

第二個問題要求育樂館總共的座位數，

其實就是在求等差級數和 S_n。

有首項、末項、公差、項數，代入求級數和公式$S_n = \frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$，

得到 $S_n = \frac{(28+76)\times 25}{2} = \frac{\overset{52}{\cancel{104}} \times 25}{\cancel{2}} = 1300$

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times\ 25 \\ \hline 260 \\ 104 \\ \hline 1300 \end{array}$$

所以育樂館總共有 1300 個座位。

Ex3. 一架轟炸機在高空中投擲炸彈，第一秒鐘炸彈落下 4.9 公尺，

之後速度越來越快，每秒鐘落下的距離增加 9.8 公尺

(即第二秒落下 14.7 公尺、第三秒落下 24.5 公尺)，

若炸彈落下 40 秒後觸地爆炸，請問：

(1)炸彈第 40 秒落下的垂直距離為何？

(2)轟炸機開始投擲炸彈時，離地面的高度為何？

◎解題思維與解答：

先理解一下題意，炸彈從高空落下，第一秒落下 4.9 公尺，

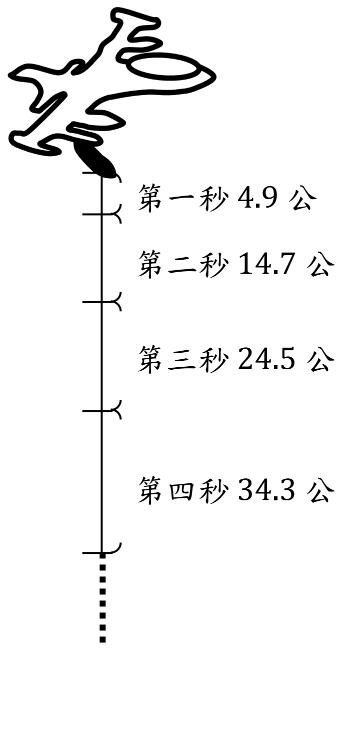
之後越來越快，每秒落下的距離增加 9.8 公尺，

也就是說第二秒落下 $4.9+9.8=14.7$ 公尺，

第三秒落下 $14.7+9.8=24.5$ 公尺，

第四秒落下 $24.5+9.8=34.3$ 公尺，…，

一直到第四十秒，然後就觸地爆炸了。



我們畫個簡圖來解釋一下。

把這些數字寫成一數列：

$$4.9\,,14.7\,,24.5\,,34.3\,,\ldots$$

那麼首項就是第一秒的 4.9，公差就是 9.8 。

第一題要求的就是第 40 項 a_{40} ，

可以利用「 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 」求出來：

$$\begin{aligned} a_{40} &= 4.9 + (40-1) \times 9.8 \\ &= 4.8 + 39 \times 9.8 \\ &= 4.9 + 382.2 \\ &= 387.1 \end{aligned}$$

第二個問題是問轟炸機投擲時離地面的高度，

也就是炸彈落下的距離。

炸彈在空中停留了 40 秒，所以求這 40 秒所落下的距離總和 S_{40}。

有首項 $a_1 = 4.9$ 、項數 $n = 40$ 、末項 $a_{40} = 387.1$，

就可以利用「$S_n = \frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$」：

$$S_{40} = \frac{(4.9+387.1)\times 40}{2} = \frac{392 \times \cancel{40}^{20}}{\cancel{2}} = 7840$$

所以轟炸機離地面 7840 公尺。

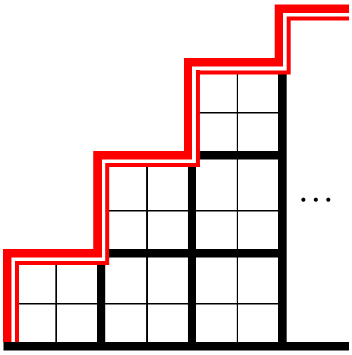
Ex4. 有一種樓梯每階的長、寬與增加的高度都相同，

今天要在樓梯的側面貼上正方形磁磚(如圖)，

第一階貼了 4 塊，第二階貼了 8 塊，…依此類推，

貼完 112 塊磁磚後，恰好把樓梯的一側貼滿，

請問這個樓梯共有幾階？



◎解題思維與解答：

從題目和圖當中就可以知道，

第一階貼了 4 塊，第二階貼了 8 塊，第三階貼了 12 塊，

每多一階就再多需要 4 塊，

所以每階所需要的磁磚數成一個等差數列：

$$4,8,12,\ldots，$$

首項 $a_1=4$ 、公差 $d=4$。

假設這個樓梯有 n 階，也就是有 n 項。

題目有提到總共貼了 112 塊磁磚，

所以這 n 項和 $S_n=112$ ，想求的就是項數 n。

有了首項 $a_1=4$ 、公差 $d=4$、級數和 $S_n=112$，

想求項數 n，可以使用「$S_n=\frac{[2a_1+(n-1)d]\times n}{2}$」這個公式：

$$112=\frac{[2\times 4+(n-1)\times 4]\times n}{2}$$

這式子看起來很複雜，沒關係，我們慢慢整理！

$$112=\frac{[2\times 4+(n-1)\times 4]\times n}{2}$$

$$\Rightarrow\ 112=\frac{(8+4n-4)\times n}{2}$$

$$\Rightarrow\ 112=\frac{(4n+4)\times n}{2}$$

$$\Rightarrow\ 112\times 2=(4n+4)\times n$$

$$\Rightarrow\ 224=4n^2+4\mathrm{n}$$

$$\Rightarrow\ n^2+\mathrm{n}-56=0$$

利用十字交乘法：

前面 n^2拆成$n\times n$、後面 -56拆成$8\times(-7)$，造出中間$+n$

$$\begin{array}{ccc} n & \times & +8 \\ n & & -7 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{+8n-7n=+n} \end{array}$$

$$\Rightarrow\ (n+8)(n-7)=0$$

$\Rightarrow\ n=7\ or\ -8$(−8不合，因為項數不會是負的)

所以這個樓梯共有 7 階。

閱讀重點提問

1. 請計算 1 到 100 之間，所有能被 7 整除的數字和。

   由題目可以得知，那麼這些數字所成的級數為：

   ____

   這個級數是否為等差級數？__________

   如果是的話，首項 $a_1 =$________、公差 $d =$________、

   項數 $n =$________、末項 $a_n =$________；所想要求的是___________。

   可以利用等差級數和公式「　　　　　　　　　　　　　　　」，求出_______

2. 光明電影院有 11 排的座位，每一排座位數均比前一排座位數多 2 個，第一排共有 15 個座位，求此電影院的總座位數量。

   由題目可以得知，那麼這些數字所成的級數為：

   ____

   這個級數是否為等差級數？__________

   如果是的話，首項 $a_1 =$________、公差 $d =$________、

   項數 $n =$________；所想要求的是___________。

   可以利用等差級數和公式「　　　　　　　　　　　　　　　」，求出_______

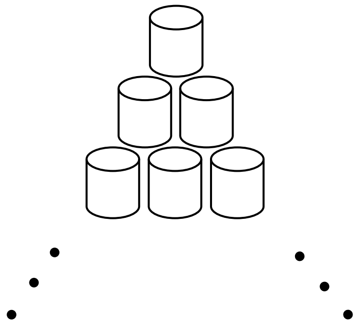
• 隨堂練習：

1. 請計算 1 到 200 之間，所有能被 6 整除的數字和。

2. 好響音樂廳第一排有 67 個座位，之後每一排比前一排多 3 個座位，已知最後一排共有 133 個座位，則音樂廳內的座位共有多少排，又共有多少座位。

3. 一直昇機空拋救災物資，第一秒鐘救災物資落下 4.9 公尺，之後速度越來越快，每秒鐘落下的距離增加 9.8 公尺(即第二秒落下 14.7 公尺、第三秒落下 24.5 公尺)，若救災物資落下 5 秒後剛好到達地面，求直昇機離地面的高度。

4. 大賣場常會將飲料罐排成下圖，來做促銷，在賣場打工的小敏打算以每層差一罐的方式排 10 層，需用幾罐飲料？



還是不太懂~例 2， 請看下面影片 https://youtu.be/LieFL13vCU4	還是不太懂~例 3， 請看下面影片 https://youtu.be/bppUV13ADeM	還是不太懂~例 4， 請看下面影片 https://youtu.be/xz1Nk4E1oyE