

單元二：等差數列

課文 A：等差數列的基本概念

■ 等差數列

上一單元我們介紹了數列，而且也觀察了一些規律，

像是 Ex3 中第一行的座號依序為：1,5,9,13,17,21,25,29,33,37,41,45,49，

這一數列的規律就是「任意相鄰的兩項，後項減去前項都等於 4」。

這種數列的規律還蠻常見的，

就是「任意相鄰的兩項，後項減去前項所得的差都相同」，

像是這種數列我們就稱為**等差數列**，

而那個後項減去前項所得的差我們就稱為**公差**，通常記為 d 。

再舉一個例子，在 1~20 當中 3 的倍數有：3,6,9,12,15,18。

$$a_2 - a_1 = 6 - 3 = 3 ;$$

$$a_3 - a_2 = 9 - 6 = 3 ;$$

$$a_4 - a_3 = 12 - 9 = 3 ;$$

$$a_5 - a_4 = 15 - 12 = 3 ;$$

$$a_6 - a_5 = 18 - 15 = 3 ;$$

這一數列的規律是：「任意相鄰的兩項，後項減去前項所得的差都是 3」，

所以這個數列就是等差數列，而 3 就是這個數列的公差。

以下有 4 個例題，請你依指示完成任務。讓我們來試試看！

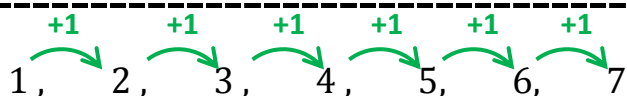
Ex1. 判斷下列各數列是否為等差數列。如果是，請寫出數列的公差。

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (2) 5, 2, -1, -4, -7, -10

(3) 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 (4) 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1

◎解題思維與解答：

(1)



從上圖我們可以知道，後項減去前項的差都是 1，

所以 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 就是等差數列，公差 d 為 1。

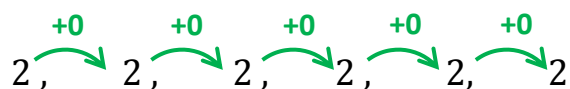
(2)



從上圖我們可以知道，後項減去前項的差都是 -3，

所以 5, 2, -1, -4, -7, -10 就是等差數列，公差 d 為 -3。

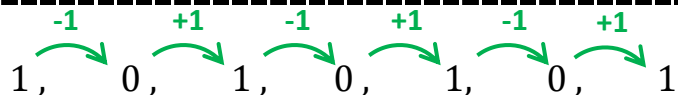
(3)



從上圖我們可以知道，後項減去前項的差都是 0，

所以 2, 2, 2, 2, 2, 2 就是等差數列，公差 d 為 0。

(4)



從上圖我們可以知道，任意相鄰兩項的差不相等，

所以 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 不是等差數列。

Ex2. 下列空格中填入適當的數，使得各數列成為等差數列。

(1) 5, _____, _____, _____, _____

(2) _____, _____, _____, $\frac{5}{3}$, 3, _____, _____

(3) _____, _____, 2b, 4b, _____, _____, _____

◎解題思維與解答：

(1)從上面的部分訊息，我們就可以算出

$$\text{公差 } d = a_2 - a_1 = 8 - 5 = 3。$$

也就是說之後每一項都會比其前一項多 3：

$$5, \xrightarrow{+3} 8, \xrightarrow{+3} 11, \xrightarrow{+3} 14, \xrightarrow{+3} 17, \xrightarrow{+3} 20, \xrightarrow{+3} 23$$

(2)從上面的部分訊息，我們就可以算出

$$\text{公差 } d = a_5 - a_4 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}。$$

也就是說之後每一項都會比其前一項多公差 $d = \frac{1}{2}$ 。

$$a_6 = a_5 + d = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} ; a_7 = a_6 + d = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$$

接著，我們由 $a_4 = a_3 + d$ ，得 $\frac{5}{2} = a_3 + \frac{1}{2}$ ，故 $a_3 = 2$ ；

同理，由 $a_3 = a_2 + d$ ； $a_2 = a_1 + d$ ，算出 a_2 、 a_1 。結果如下：

$$\underline{1}, \quad \underline{\frac{3}{2}}, \quad \underline{2}, \quad \underline{\frac{5}{2}}, \quad \xrightarrow{+\frac{1}{2}} 3, \quad \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \underline{\frac{7}{2}}, \quad \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \underline{4}$$

(3)

這一數列雖然沒有出現實際的數字，

但是等差數列的概念是一樣的，

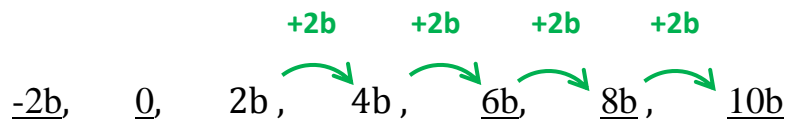
公差會等於相鄰兩項的差(後項減前項)。

從題目中可以知道的其中相鄰兩項分別是 $a_3 = 2b$ 、 $a_4 = 4b$ ，

所以我們就可以利用這兩項算出公差：

$$d = a_4 - a_3 = 4b - 2b = 2b。$$

結果如下：



Ex3. 下列空格中填入適當的數，使得各數列成為等差數列。

(1) 4, _____, 10, _____, _____, _____

(2) _____, $\frac{7}{3}$, _____, _____, $\frac{16}{3}$, _____

(3) _____, $-6b$, _____, _____, _____, $2b$, _____

◎解題思維與解答：

(1) 4, _____, 10, _____, _____, _____

在這個數列中，已知的訊息有第一項 $a_1 = 4$ 、第三項 $a_3 = 10$ ，

我們先假設公差為 d ，就可以推出所有項了！

$$4, \quad a_2, \quad 10, \quad a_4, \quad a_5, \quad a_6, \quad a_7$$

從上面可以知道，第三項 a_3 就是 $4 + d + d = 10$ ，

所以 $4 + 2d = 10$ ， $2d = 10 - 4 = 6$ ，

可以得到公差 $d = 3$ 。

也就是說之後每一項都會比其前一項多3：

$$4, \quad \underline{7}, \quad 10, \quad \underline{13}, \quad \underline{16}, \quad \underline{19}, \quad \underline{22}$$

(2) _____, $\frac{7}{3}$, _____, $\frac{16}{3}$, _____, _____

這個數列的第二項 $a_2 = \frac{7}{3}$ 、第五項 $a_5 = \frac{16}{3}$ ，假設公差為 d ，

從上面可以數出，第五項 a_5 就是 $\frac{7}{3} + d + d + d = \frac{16}{3}$ ，

所以 $\frac{7}{3} + 3d = \frac{16}{3}$ ， $3d = \frac{16}{3} - \frac{7}{3} = 3$ ，可以得到公差 $d = 1$ 。

也就是說之後每一項都會比其前一項多 1：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & +1 & & +1 & & +1 & & +1 & & +1 & & +1 & & \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ \frac{4}{3} & & \frac{7}{3} & & \frac{10}{3} & & \frac{13}{3} & & \frac{16}{3} & & \frac{19}{3} & & \frac{22}{3} & & \end{array}$$

(3) _____, $-6b$, _____, _____, _____, $2b$, _____

可以看出第二項 $a_2 = -6b$ 與第六項 $a_6 = 2b$ 之間差了 4 個公差。

假設公差為 d ，第六項 a_6 就是 $(-6b) + d + d + d + d = 2b$ ，

所以 $(-6b) + 4d = 2b$ ，

$4d = 2b - (-6b) = 8b$ ，可以得到公差 $d = 2b$ 。

也就是說之後每一項就是其前一項加上 $2b$ ：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & +2b & & +2b & & +2b & & +2b & & +2b & & +2b & & \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ -8b & & -6b & & -4b & & -2b & & 0 & & 2b & & 4b & & \end{array}$$

Ex4. 回答下列問題，已知等差數列的首項是 2。

(1) 若公差為 3，請寫出它的前五項。

(2) 若公差為 -3，請寫出它的前五項。

(3) 觀察上面的結果，你認為等差數列中，公差為正或為負時，數列會有什麼差別？

◎ 解題思維與解答：

(1) 首項 $a_1 = 2$ ，公差 $d = 3$ ：

$$a_2 = a_1 + d = 2 + 3 = 5 ;$$

$$a_3 = a_2 + d = 5 + 3 = 8 ;$$

$$a_4 = a_3 + d = 8 + 3 = 11 ;$$

$$a_5 = a_4 + d = 11 + 3 = 14$$

$$2, \xrightarrow{+3} \underline{5}, \xrightarrow{+3} \underline{8}, \xrightarrow{+3} \underline{11}, \xrightarrow{+3} \underline{14}$$

(2) 首項 $a_1 = 2$ ，公差 $d = -3$ ：

$$a_2 = a_1 + d = 2 + (-3) = -1;$$

$$a_3 = a_2 + d = (-1) + (-3) = -4$$

$$a_4 = a_3 + d = (-4) + (-3) = -7;$$

$$a_5 = a_4 + d = (-7) + (-3) = -10.$$

$$2, \xrightarrow{-3} \underline{-1}, \xrightarrow{-3} \underline{-4}, \xrightarrow{-3} \underline{-7}, \xrightarrow{-3} \underline{-10}$$

(3) 從(1)跟(2)這兩個數列當中可以看到，

相同的首項，但是不同的公差，

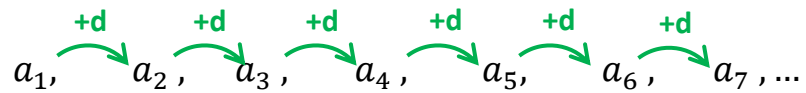
如果公差是正的話那麼後項就會越來越大，

而如果公差是負的話那麼後項就會越來越小。

閱讀重點提問

1. 根據上面的課文，請用自己的話解釋「等差數列」、「公差」，並舉一個數列的例子做說明。

2. 一個等差數列當中，各項的關係如下：



- (1) 相鄰的兩項之間差_____個公差。
- (2) a_3 比 a_1 多_____個公差。
- (3) a_4 比 a_1 多_____個公差。
- (5) a_5 比 a_1 多_____個公差。
- (6) a_6 比 a_1 多_____個公差。
- (7) a_7 比 a_1 多_____個公差。

• 隨堂練習：

1. 判斷下列各數列是否為等差數列。如果是，請寫出數列的公差。

(1) 2,4,6,8,10,12,14

(2) 8,1, -6, -13, -20, -27

(3) 0,0,0,0,0

(4) 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7

(5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$

2. 下列空格中填入適當的數，使得各數列成為等差數列。

(1) 3,10, _____, _____, _____, _____

(2) _____, _____, _____, $\frac{7}{3}$, 3, _____, _____

(3) _____, _____, _____, _____, _____, $\frac{3}{2}$, 2

(4) _____, _____, 3b, 6b, _____, _____, _____

3. 下列空格中填入適當的數，使得各數列成為等差數列。

(1) 7, _____, 13, _____, _____, _____

(2) _____, 1, _____, _____, $\frac{1}{4}$, _____, _____

(3) _____, _____, _____, 3, _____, _____, -9

(4) _____, $-\frac{3}{5}b$, _____, _____, _____, $\frac{1}{5}b$, _____

還是不太懂
等差數列的意義
請看下面影片



<https://youtu.be/mYmL5qIF6G4>

還是不太懂~例 1，
請看下面影片



<https://youtu.be/k-WT0oActKA>

還是不太懂~例 2，
請看下面影片



<https://youtu.be/oi-2LQYCuIM>

還是不太懂~例 3，
請看下面影片



<https://youtu.be/fQkDsDBdwe0>

還是不太懂~例 4，
請看下面影片



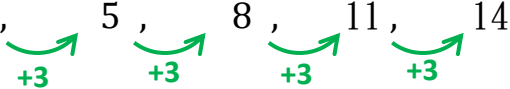

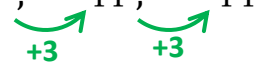

<https://youtu.be/d1oBFuVHmCc>

單元二：等差數列

課文 B：等差數列的第 n 項公式

如果我們知道一等差數列的首項和公差的話，那麼我們就能把之後的每一項都推算出來了。

例如上一節的 Ex4，已知等差數列的首項是 2、公差為 3，

那麼前五項會是：2,  5,  8,  11,  14

■ 那如果我們想要求此等差數列的第 36 項時，怎麼辦？

我們當然可以利用這個規律繼續推算 a_6, a_7, a_8, \dots 一直到 a_{36} ！

但是這樣子如果一不小心算錯其中一項，那麼後面就會全部錯下去！

所以我們就會想要知道首項、公差與各項之間的關係，

這個關係可以幫助我們在知道首項、公差的情況下，

直接推出想知道的那一項，不用逐項逐項的推算。

先來做一個簡單的觀察：

$$2 \xrightarrow{+3} 5$$

第 2 項比首項多 1 個公差，

$$a_2 = a_1 + 1 \times d = 2 + 1 \times 3 = 5$$

$$2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8$$

第 3 項比首項多 2 個公差，

$$a_3 = a_1 + 2 \times d = 2 + 2 \times 3 = 8$$

$$2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11$$

第 4 項比首項多 3 個公差，

$$a_4 = a_1 + 3 \times d = 2 + 3 \times 3 = 11$$

$$2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11 \xrightarrow{+3} 14$$

第 5 項比首項多 4 個公差，

$$a_5 = a_1 + 4 \times d = 2 + 4 \times 3 = 14$$

那麼第 36 項 a_{36} 呢？它會比首項多幾個公差？

依此類推，第 36 項比首項多 35 個公差，

所以我們要算 a_{36} 就是 $a_1 + 35 \times d = 2 + 35 \times 3 = 107$ ，

這樣不用逐項逐項推算，很方便吧！

依此類推，第 n 項的話就會是首項加 $(n - 1)$ 個公差，

也就是： $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ，這就是等差數列的公式！

這個公式，有 4 個主要元素，首項 a_1 、第 n 項 a_n 、項數 n 、公差 d ：

$$\begin{array}{ccccccc} a_n & = & a_1 & + & (n-1) & d & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ \text{第} & & \text{首} & & \text{項數} & \text{公} & \\ n & & \text{項} & & -1 & \text{差} & \\ \text{項} & & & & & & \end{array}$$

這 4 個未知數只要知道其中 3 個，就可以求出另外的第 4 個。

我們來練習看看以下 5 個利用 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ 的例題！

Ex1. 一等差數列首項為 -14 ，公差為 9 ，

求此等差數列的第 9 項為何？

◎解題思維與解答：

前面我們已經知道第 n 項的公式了，我們可以直接使用公式，

先將知道的條件與要求的列出來：

首項 $a_1 = -14$ 、公差 $d = 9$ ，想求第 9 項 a_9 ，也就是 $n = 9$ ，

然後將這些代入公式“ $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ”中：

$$a_9 = (-14) + (9 - 1) \times 9 = (-14) + 8 \times 9 = 58$$

Ex2. 已知一等差數列第 21 項為 124 ，公差為 -3 ，

求此等差數列的首項為何？

◎解題思維與解答：

我們直接利用公式，

第 21 項 $a_{21} = 124$ ，也就是 $n = 21$ ，公差 $d = -3$ ，

然後將這些代入公式“ $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ”中：

$$124 = a_1 + (21 - 1) \times (-3)$$

$$\Rightarrow 124 = a_1 + 20 \times (-3)$$

$$\Rightarrow 124 = a_1 + (-60)$$

$$\Rightarrow 124 = a_1 - 60 \Rightarrow 124 + 60 = a_1 \Rightarrow a_1 = 184$$

Ex3. 已知一等差數列首項為 20，第 18 項為 71，

求此等差數列的公差為何？

◎解題思維與解答：

我們直接利用公式，

首項 $a_1 = 20$ ，第 18 項 $a_{18} = 71$ ，也就是 $n = 18$ ，想求公差 d ，

然後將這些代入公式“ $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ”中：

$$71 = 20 + (18 - 1) \times d$$

$$\Rightarrow 71 = 20 + 17 \times d$$

$$\Rightarrow 71 - 20 = 17 \times d$$

$$\Rightarrow 51 = 17 \times d \Rightarrow 51 \div 17 = d \Rightarrow 3 = d$$

Ex4. 已知一等差數列首項為 4，末項為 22，公差為 3，

求此等差數列共有幾項？

◎解題思維與解答：

我們直接利用公式，

首項 $a_1 = 4$ ，假設末項是第 n 項 $a_n = 22$ ，公差 $d = 3$ ，想求項數 n ，

然後將這些代入公式“ $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ”中：

$$22 = 4 + (n - 1) \times 3$$

$$\Rightarrow 22 - 4 = (n - 1) \times 3$$

$$\Rightarrow 18 = (n - 1) \times 3$$

$$\Rightarrow 18 \div 3 = n - 1 \Rightarrow 6 = n - 1 \Rightarrow 6 + 1 = n \Rightarrow 7 = n$$

Ex5. 已知一等差數列第 3 項為 5，第 7 項為 21，

求此等差數列的公差為何？首項為何？

◎解題思維與解答：

原則上告訴我們首項 a_1 跟公差 d ，我們就可以將所有項求出來，

現在反過來告訴我們第 3 項 $a_3 = 5$ 、第 7 項 $a_7 = 21$ ，

想要求公差 d 跟首項 a_1 。

我們先回到基本的等差數列想法來看，將數列寫下來：

$$a_1, \xrightarrow{+d} a_2, \xrightarrow{+d} 5, \xrightarrow{+d} a_4, \xrightarrow{+d} a_5, \xrightarrow{+d} a_6, \xrightarrow{+d} 21$$

以前我們都是拿各項去跟首項作比較，

可是現在首項不知道怎麼辦？很簡單，我們就拿知道的來做比較！

$$a_1, \xrightarrow{+d} a_2, \xrightarrow{+d} 5, \xrightarrow{+d} a_4, \xrightarrow{+d} a_5, \xrightarrow{+d} a_6, \xrightarrow{+d} 21$$

仔細觀察一下，第 7 項 a_7 比第 3 項 a_3 多了 4 個 d ！

可以寫成 $a_3 + 4d = a_7$ ，接著將已知條件代進去，

得到 $5 + 4d = 21$ ，解得 $d = 4$ 。

知道公差 $d = 4$ 之後，原本就知道第 3 項 $a_3 = 5$ ，

所以就可以反推回去求出首項 a_1 了！

a_1 會比 a_3 少了 $(3 - 1)$ 個公差 d ，

所以 $a_1 = a_3 - (3 - 1)d = 5 - 2 \times 4 = 5 - 8 = -3$ 。

■ 另外一種解法:

如果我們直接使用公式的話，先將知道的條件與要求的列出來：

第 3 項 $a_3 = 5$ ，第 7 項 $a_7 = 21$ ，想求公差 d 跟首項 a_1 。

有兩個要求的未知數，應該要有兩個方程式才能求出解來，

分別將第 3 項 $a_3 = 5$ ，第 7 項 $a_7 = 21$ ，

代入公式“ $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ”，得到

$$\begin{aligned}5 &= a_1 + (3 - 1) \times d \\21 &= a_1 + (7 - 1) \times d\end{aligned}$$

這兩個方程式就可以列式解聯立：

$$\begin{cases} 5 = a_1 + (3 - 1) \times d \\ 21 = a_1 + (7 - 1) \times d \end{cases} \xrightarrow{\text{整理}} \begin{cases} 5 = a_1 + 2 \times d \dots (1) \\ 21 = a_1 + 6 \times d \dots (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) : 16 = 4 \times d$$

$$\Rightarrow 16 \div 4 = d$$

$$\Rightarrow 4 = d$$

$$\text{代回(1)式} : 5 = a_1 + 2 \times 4$$

$$\Rightarrow 5 = a_1 + 8$$

$$\Rightarrow 5 - 8 = a_1$$

$$\Rightarrow -3 = a_1$$

閱讀重點提問

1. 一個等差數列當中，各項的關係如下：



- (1) a_2 比 a_1 多 _____ 個公差，所以 $a_2 = a_1 + (\text{_____} - 1)d$ 。
- (2) a_3 比 a_1 多 _____ 個公差，所以 $a_3 = a_1 + (\text{_____} - 1)d$ 。
- (3) a_4 比 a_1 多 _____ 個公差，所以 $a_4 = a_1 + (\text{_____} - 1)d$ 。
- (5) a_5 比 a_1 多 _____ 個公差，所以 $a_5 = a_1 + (\text{_____} - 1)d$ 。
- (6) a_6 比 a_1 多 _____ 個公差，所以 $a_6 = a_1 + (\text{_____} - 1)d$ 。
- (7) a_7 比 a_1 多 _____ 個公差，所以 $a_7 = a_1 + (\text{_____} - 1)d$ 。
- (8) a_n 比 a_1 多 _____ 個公差，所以 $a_n = a_1 + (\text{_____} - 1)d$ 。

2. 根據上面的課文 Ex1. ~Ex5.，利用等差數列公式來解的題目可以分成哪幾類？

• 隨堂練習：

1. 已知一等差數列首項為 12，公差為 9，求此等差數列的第 10 項為何？
2. 已知一等差數列第 12 項為 81，公差為 3，求此等差數列的首項為何？
3. 已知一等差數列首項為 74，第 21 項為 14，求此等差數列的公差為何？
4. 已知一等差數列首項為 21，末項為 -12 ，公差為 $-\frac{3}{4}$ ，求此等差數列共有幾項？
5. 已知一等差數列第 2 項為 65，第 12 項為 25，求此等差數列的公差為何？首項為何？

還是不太懂
等差數列第 n 項公式，
請看下面影片



<https://youtu.be/iUsnmhHcuDk>

還是不太懂~例 2，
請看下面影片



<https://youtu.be/VIsj2LfyfDY>

還是不太懂~例 3，
請看下面影片



https://youtu.be/h79UA7_9j40

單元二：等差數列

課文 C：等差中項

■ 等差中項

等差中項顧名思義會跟等差數列有關，

而「中項」指的是中間的那一項。

例如有三個數 5,11,17，這三個數形成一個等差數列，

那麼中間那項 11 就稱為是 5 和 17 的等差中項。

再舉一個例子，12,10,8 成等差數列，

那麼中間那項 10 就稱為是 12 和 8 的等差中項。

■ 三數成等差，它們之間會什麼樣的關係呢？

我們來討論一下！

有三個數 a, b, c 成等差數列，

$$a, \overset{+\text{公差 } d}{\curvearrowright} b, \overset{+\text{公差 } d}{\curvearrowright} c$$

公差 $d = b - a = c - b$ ；

移項整理一下變成 $2b = a + c$ ，

再除以 2 $\Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$

也就是，若 a, b, c 三個數成等差數列，

則 b 就稱為 a 和 c 的等差中項，且 $b = \frac{a+c}{2}$ 。

我們來作以下 3 個有利用等差中項的例題

Ex1. 已知 $5, a, b$ 三項成等差數列，且 a, b 兩數和為 28，求 a, b 的值。

◎解題思維與解答：

從前面的學習經驗，我們得知若能知道等差數列的首項與公差，就能推算出每一項。

目前已經知道首項為 5，因此假設公差為 d ，

從而得到 $a=5+d$ ， $b=5+2d$ ，

可列出 $(5+d)+(5+2d)=28$ ，解得 $d=6$ 。

因此， $a = 11$ ， $b = 17$ 。

但有一些題目，從首項、公差出發會比較難看出下一步該怎麼做，此時，可以試試等差中項，請看以下例題。

Ex2. 已知 $3a + 2b, 10, 7a - 2b$ 三項成等差，
且 $a - 2b, 7, 3a + 4b$ 亦成等差，求 a, b 的值。

◎解題思維與解答：

從這題目當中可以發現，所要求的就是兩個未知數 a 跟 b ，

所以我們可以猜測應該需要列出兩個方程式。

看一下題目給的條件：

首先， $3a + 2b$ ， 10 ， $7a - 2b$ 三項成等差，

換句話說 10 就是 $3a + 2b$ 跟 $7a - 2b$ 的等差中項，

$$\text{列式成： } 10 = \frac{(3a+2b)+(7a-2b)}{2}。$$

再來， $a - 2b$ ， 7 ， $3a + 4b$ 三項成等差，

換句話說 7 就是 $a - 2b$ 跟 $3a + 4b$ 的等差中項，

$$\text{列式成： } 7 = \frac{(a-2b)+(3a+4b)}{2}。$$

$$\begin{cases} 10 = \frac{(3a + 2b) + (7a - 2b)}{2} \\ 7 = \frac{(a - 2b) + (3a + 4b)}{2} \end{cases}$$

等號右邊分母 2 移項過去變 $\times 2$

$$\begin{cases} 20 = (3a + 2b) + (7a - 2b) \\ 14 = (a - 2b) + (3a + 4b) \end{cases}$$

整理一下

$$\begin{cases} 20 = 10a & \dots\dots(1) \\ 14 = 4a + 2b & \dots\dots(2) \end{cases}$$

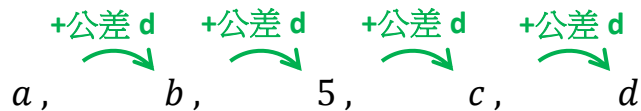
(1) 等號兩邊同除以 10 ， $a = 2$ 代入(2)

$$\begin{aligned} 14 &= 4 \times 2 + 2b \\ \Rightarrow 14 &= 8 + 2b \\ \Rightarrow 6 &= 2b \\ \Rightarrow 3 &= b \end{aligned}$$

Ex3. 已知 $a, b, 5, c, d$ 五項成等差，求 $a + b + c + d$ 的值。

◎解題思維與解答：

$a, b, 5, c, d$ 五項成等差：

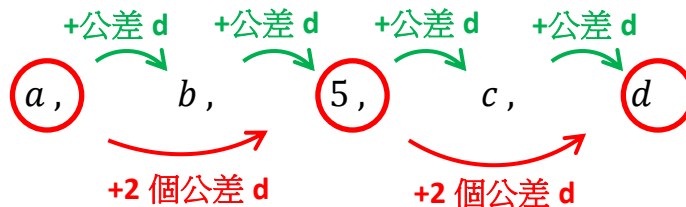


我們先挑中間三項 $b, 5, c$ 就會成等差，

也就是說 5 是 b 和 c 的等差中項，

所以就可以列式： $5 = \frac{b+c}{2}$ 。

那我們如果挑 $a, 5, d$ 的話，



所以 $a, 5, d$ 就會成等差，

也就是說 5 是 a 和 d 的等差中項，

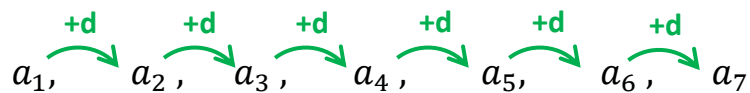
所以就可以列式： $5 = \frac{a+d}{2}$ 。

再來看看這兩個式子：
$$\begin{cases} 5 = \frac{b+c}{2} \\ 5 = \frac{a+d}{2} \end{cases}$$
 等號右邊分母 2 移項過去變 $\times 2$

$$\begin{cases} 10 = b + c \\ 10 = a + d \end{cases}$$
，題目要求的 $a + b + c + d = 10 + 10 = 20$ 。

閱讀重點提問

1. 根據上面的課文，請用自己的話解釋「等差中項」。
2. 根據上面的課文，如果有三個數 a, b, c 成等差數列，那麼這三數間會有什麼樣的關係式？
3. 一個等差數列當中，各項的關係如下：



a_4 是_____與_____的等差中項；

a_4 也會是_____與_____的等差中項；

a_4 也會是_____與_____的等差中項。

• 隨堂練習：

1. 已知 $2, a, b$ 三項成等差，且 a, b 兩數和為 28，求 a, b 的值。
2. 已知 $a + 2b, 10, 3a - 2b$ 三項成等差，且 $-a - b, 6, a + 4b$ 亦成等差，求 a, b 的值。
3. 已知 $a, b, 4, c, d$ 五項成等差，求 $a + b + c + d$ 的值。

還是不太懂，
等差中項的說明
請看下面影片



<https://youtu.be/n00C6PAPZok>

還是不太懂，
例 1~例 3
請看下面影片



<https://youtu.be/DiRz26USV-E>

單元二：等差數列

課文 D：等差數列的應用

學完等差數列後，生活當中有一些規律跟等差數列有關，

那麼就可以利用等差數列的概念去進行解題。

在解決應用問題的時候，首先要找出想要求的目標及題目所提供的條

件，再根據條件列出方程式，最後解方程式，並回答所要求的問題。

讓我們來練習看看以下 3 個例題吧！

Ex1. 曉明存錢筒裡面已經有了 75 元，他決定從 3 月 1 日起，省下每天買飲料的錢 25 元存進存錢筒裡，請問到了 4 月 30 日，他的存錢筒裡一共有多少錢？

◎解題思維與解答：

一開始有存錢筒裡面已經有了 75 元

今天是 3 月 1 日，他就存了 25 元，所以存錢筒裡面共有 100 元；

明天 3 月 2 日，又存了 25 元，存錢筒裡面就有 125 元；

再隔一天 3 月 3 日，又存下了 25 元，存錢筒裡面就有 150 元；

再隔一天 3 月 4 日，又存下了 25 元，存錢筒裡面就有 175 元；...

也就是每天都會再多 25 元。

將存錢筒裡面的錢寫下來： $75, 100, 125, 150, 175, \dots$

仔細觀察一下這個數列會發現就是一個等差數列，

首項 a_1 就是 75，公差 $d = 100 - 75 = 25$ 。

所以就可以利用這樣子的規律去推算到了 4 月 30 日總共存下到多少錢。

■從 3 月 1 日算起，4 月 30 日是第幾天呢？

因為 3 月共有 31 天，4 月共有 30 天，

所以 3 月 1 日到 4 月 30 日共有 $(31 + 30) = 61$ 天，

還有一開始就有一些錢，所以就是在求第 62 項 a_{62} 。

首項 a_1 就是 75，公差 $d = 25$ ，要求 a_{62} ，也就是 $n = 62$ 。

$a_{62} = 75 + (62 - 1) \times 25 = 75 + 61 \times 25 = 75 + 1525 = 1600$ 。

Ex2. 卉瑜為了存錢買一雙 2800 元的釘鞋，決定從 6 月 1 日起，省下每天買飲料的錢 25 元，請問要到了幾月幾日，他才會存到足夠的錢？

◎解題思維與解答：

假設今天是 6 月 1 日，他就省下了 25 元；

明天 6 月 2 日，又省下了 25 元，兩天總共省下 50 元；

...

將總共省下的錢寫下來：25, 50, 75, 100, 125, 150, ...

仔細觀察一下這個數列會發現就是一個等差數列，

首項 a_1 就是 25，公差 $d = 50 - 25 = 25$ 。

什麼時候可以存夠錢可以買 2800 元的釘鞋呢？

不知道！但是可以假設到了第 n 天總共所存的錢 a_n 可以買釘鞋，

也就是 a_n 會比 2800 還要多，所以就可以列式成： $a_n \geq 2800$ 。

a_n 的算法是： $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ，

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 25 + (n - 1) \times 25$$

$$a_n = 25 + (n - 1) \times 25 = 25 + 25n - 25 = 25n$$

$$25n \geq 2800$$

$$n \geq 2800 \div 25 = 112$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ 25 \overline{) 2800} \\ \underline{2500} \\ 300 \\ \underline{250} \\ 50 \\ \underline{50} \\ 0 \end{array}$$

所以他要存 112 天才存夠錢可以買釘鞋。

■ 從 6 月 1 日開始算起，112 天後是幾月幾日呢？

6 月是小月，有 30 天；7 月是大月，有 31 天；8 月是大月，有 31 天；

這樣已有 $30 + 31 + 31 = 92$ 天了，還要再過 20 天才會到 112 天，

所以就會是 9 月 20 日。

Ex3. 某三角形的三個內角度數成等差，且最大內角的度數為最小內角的 2 倍，求此三角形三內角的度數分別為何？

◎解題思維：

三個數成等差，那麼我們就令等差中項為 a ；

前一項就少一個公差，就是 $a - d$ ；

後一項就多一個公差，也就是 $a + d$ 。

$$a - d, \quad a, \quad a + d$$

+公差 d +公差 d
↘ ↘

這樣子假設有什麼好處呢？

如果條件有給我們三數和的時候， $(a - d) + a + (a + d) = 3a$ 。

只留下一個未知數，計算上會比較方便！

我們假設這個三角形的三個內角度數分別是： $a - d, a, a + d$

接下來看條件，

從題目當中可以知道這三角形的最大角為最小角的 2 倍，

所以可以列式成： $a + d = 2(a - d)$ 。

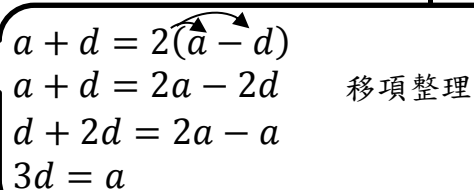
那另外一個條件呢？

很重要的條件，就是這是一個三角形的三個內角。

我們知道三角形的內角和為 180 度，

所以就可以列式成： $(a - d) + a + (a + d) = 180$ 。

$$\begin{cases} a + d = 2(a - d) \\ (a - d) + a + (a + d) = 180 \end{cases}$$


$$\begin{aligned} a + d &= 2(a - d) \\ a + d &= 2a - 2d && \text{移項整理} \\ d + 2d &= 2a - a \\ 3d &= a \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3d = a & \dots\dots (1) \\ 3a = 180 & \dots\dots (2) \end{cases}$$

(2)同除以3 $\Rightarrow a = 180 \div 3 = 60$ 再代回(1)

$$3d = 60 \xrightarrow[\text{同除以 3}]{} d = 20$$

因此，此三角形的三內角分別 40 度、60 度、80 度。

閱讀重點提問

1. 小峰存錢筒裡面已經有了 75 元，他決定從 4 月 1 日起，省下每天買飲料的錢 20 元存進存錢筒裡，請問到了 4 月 30 日，他有了多少錢？

由題目可以得知，存在錢筒裡面的錢，這些數字所成的數列為：

這個數列是否為等差數列？_____

如果是的話，首項 $a_1 =$ _____、公差 $d =$ _____、

項數 $n =$ _____；所要求的是第幾項？

2. 大冬為了存錢買一雙 3000 元的釘鞋，決定從今天開始省下每天買飲料的錢 20 元，請問需要幾天他才會存到足夠的錢？

由題目可以得知，大冬如果每日結算總共所存的錢，那麼這些數字所成的數列為：_____

這個數列是否為等差數列？_____

如果是的話，首項 $a_1 =$ _____、公差 $d =$ _____、末項=_____；

所要求的是第幾項？

• 隨堂練習：

1. 小晴決定從7月1日起，每天健走4公里，請問到了8月31日，他一共健走了多少公里？
2. 為了增進大家的英文實力，老師規定每人在暑假中要閱讀一本英文小說。小希選了一本200頁的英文小說，她之前已經讀了20頁了，決定之後再從7月1日起開始閱讀，每天讀5頁，請問要到了幾月幾日她才能讀完整本小說？
3. 若一三角形內角成等差，且最大角比最小角多20度，求此三角形三內角為何？

還是不太懂~例1~2，
請看下面影片



https://youtu.be/oH8_IbLulwM

還是不太懂~例3，
請看下面影片



<https://youtu.be/TvW2NmWEuHg>