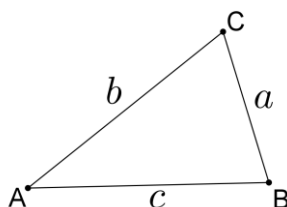


## 單元三 三角形的邊角關係

### 課文A： 三角形的三邊關係

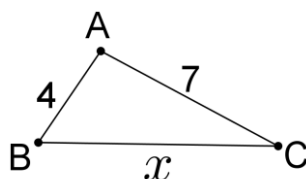
---

在國小的時候有學過三角形的三邊關係，來回憶一下吧！



如上圖，「從 B 點走到 C 點再走到 A 點」會比「直接從 B 點走到 A 點」所花的距離還要長，也就是  $a+b>c$ 。同理： $c+a>b$ ， $b+c>a$ 。即三角形任意兩邊長的和大於第三邊長。

如果有一個三角形，它的三邊分別為 7、4、 $x$ ，請問  $x$  的範圍是如何？



三角形任意兩邊長的和大於的三邊長：

$$x+7>4 \Rightarrow x>-3 \dots (1)$$

$$4+x>7 \Rightarrow x>3 \dots (2)$$

$$7+4>x \Rightarrow 11>x \dots (3)$$

所以  $11>x>3$ 。

從上面例子發現，三角形的任一邊長必須要大於另外兩邊長的差。

像是例子中的一邊  $x$ ，一定要大於另外兩邊的差  $7-4=3$ 。

例題一：已知三角形的三邊長均為整數，且其中兩邊為 2、13，請問第三邊可能為何？

◎解題思維：

利用「任意兩邊長的和大於第三邊長」、「任一邊長大於另外兩邊長的差」

解：由題目條件列式： $2+13>$ 第三邊 $>13-2$

$$15>$$
第三邊 $>11$

邊長均為整數，所以第三邊可能是 12、13、14。

例題二：下列各組數為三條線段的長度，有哪幾組可以構成三角形？

(1) 4、5、8

(2) 5、9、16

◎解題思維：利用「兩邊和 $>$ 第三邊 $>$ 兩邊差」判斷。

解：(1) 4、5、8

兩邊和 $>$ 第三邊 $>$ 兩邊差： $4+5>8>5-4$

$$5+8>4>8-5$$

$$8+4>5>8-4$$

每一邊都符合三角形的三邊關係，所以 4、5、8 這組三條線段可以形成一個三角形。

(2) 5、9、16

兩邊和 $>$ 第三邊 $>$ 兩邊差： $5+9\not>16>9-5$  不合

$$9+16>5\not>16-9$$
 不合

$$16+5>9\not>16-5$$
 不合

不符合三角形的三邊關係，所以 5、9、16 這組三條線段不能形成一個三角形。

從上題來看，每次討論一組都要討論三條式子，很多很麻煩，有辦法可以討論少一點的嗎？

其實是有辦法的，因為「兩邊差」關係其實就是「兩邊和」關係移項而來的，所以當「兩邊和」關係都成立時，自然而然「兩邊差」關係就都會成立了！

這樣還是要檢查「兩邊和>第三邊」的三條式子，其實可以更少。

如果給三條線段， $a>b>c$ ，要檢驗「兩邊和>第三邊」，理論上是要檢查下方三種狀況，但是我們知道最長邊一定大於另外兩邊，那最長邊再加上一邊就一定大於第三邊！

$$b+c>a \text{ (檢查這個式子就好)}$$

$$a>b \Rightarrow c+a>b \text{ (不用檢查一定對)}$$

$$a>c \Rightarrow a+b>c \text{ (不用檢查一定對)}$$

因此，只要檢查「最短邊+第二長邊>最長邊」會不會成立就好了！

例題二另解：

(1) 4、5、8

$$4<5<8$$

而且  $4+5>8$ ，可以形成一個三角形。

(2) 5、9、16

$$5<9<16$$

而且  $5+9 \not> 16$ ，所以不可以形成一個三角形。

例題三：如果有三條線段分別為 $(x-3)$ 、 $(x+2)$ 、 $(x+7)$ ，若此三條線段可以圍成一個三角形，則  $x$  的範圍為何？

◎解題思維：

注意三線段必須為正數，以及「最短邊+第二長邊>最長邊」的關係找出範圍。

解：

三條線段的長度一定為正，也就是：

$$x-3>0 \Rightarrow x>3 \dots (1)$$

$$x+2>0 \Rightarrow x>-2 \dots (2)$$

$$x+7>0 \Rightarrow x>-7 \dots (3)$$

這三條線段的長度大小為 $(x-3)<(x+2)<(x+7)$ 。

所以可以列式成：

$$x-3+x+2>x+7 \quad (\text{整理})$$

$$2x-1>x+7 \quad (\text{右邊的 } x \text{ 移項到 } > \text{左邊變成 } -x)$$

$$(\text{左邊的 } -1 \text{ 移項到 } > \text{右邊變成 } +1)$$

$$2x-x>7+1$$

$$x>8 \dots (4)$$

由(1)、(2)、(3)、(4)可以得到： $x>8$

重點提問

- 1.請舉例出一組三邊長，而它可以形成一個三角形。
- 2.請解釋為什麼所舉的這組三邊長可以形成一個三角形。

• 隨堂練習：

1. 已知三角形的三邊長均為整數，且其中兩邊為 15、9，請問第三邊可能為何？

2. 下列各組數為三條線段的長度，有哪幾組可以構成三角形？

(1) 5、5、5    (2) 5、12、13    (3) 4、4、9    (4) 13、7、20    (5) 2、4、8

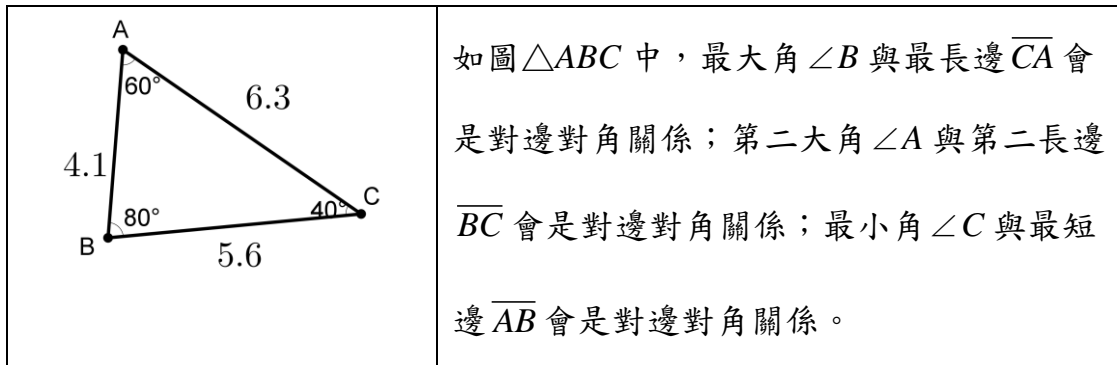
3. 如果有一個三角形，其三邊分別為 $(x-1)$ 、 $(x+9)$ 、 $(x+11)$ ，則  $x$  的範圍為何？

還是不太懂，請看下面影片

<p>課文</p>  <p><a href="https://youtu.be/oCDK9XEF8Bk">https://youtu.be/oCDK9XEF8Bk</a></p>	<p>例題一、三</p>  <p><a href="https://youtu.be/TnkYy-C1xcw">https://youtu.be/TnkYy-C1xcw</a></p>
--	---

## 課文B： 三角形的對邊與對角關係

介紹完三角形的三邊關係後，要介紹三角形的對邊與對角關係。我們來看看下面的例子。



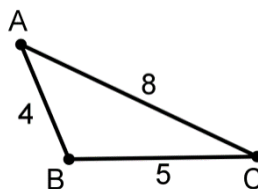
所以我們可以知道：在同一個三角形中，大邊就會對大角、大角也會對大邊。所以當我們知道三角形中三邊長度的大小關係，就可以推論出三個內角角度之間的大小關係；反過來也可以，當我們知道三角形中三個內角角度的大小關係，就可以推論出三角形三邊的大小關係。舉一些例子來看看！

例題一： $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=4$ 、 $\overline{BC}=5$ 、 $\overline{CA}=8$ ，比較 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的大小關係為何？

◎解題思維：利用大邊對大角的關係找出角的大小。

解：

先依據題目將三角形畫出來：



已知 $\overline{CA} > \overline{BC} > \overline{AB}$ ，根據「同一個三角形中，大邊對大角」。

所以 $\angle B > \angle A > \angle C$ 。

例題二：△ABC 中， $\angle A=42^\circ$ 、 $\angle B=112^\circ$ ，比較  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$  的長短關係為何？

◎解題思維：利用大角對大邊的關係找出角的大小。

解：因為  $\angle B > \angle A > \angle C$ ，根據「同一個三角形中，大角對大邊」。  
所以  $\overline{CA} > \overline{BC} > \overline{AB}$ 。

例題三：如右圖是一個社區三角公園△ABC，其中  $\angle B=42^\circ$ 、 $\angle C=72^\circ$ 。  
已知曉明和小華從公園一邊  $\overline{BC}$  的中點 P，兩人同時反方向沿著三角公園跑，如果兩人的速率一樣，請問誰會先抵達 A 點？

◎解題思維：

曉明從 P 點出發，最後跑到 A 點，所以他跑的距離就是  $\overline{PB} + \overline{BC}$ 。

小華從 P 點出發，最後跑到 A 點，所以他跑的距離就是  $\overline{PC} + \overline{CA}$ 。

根據我們學過的三角形性質，如何利用角度判斷誰跑的距離比較短呢？

解：如下圖△ABC 中， $\angle C=72^\circ$ 、 $\angle B=42^\circ$ ，得知  $\angle C > \angle B$ 。

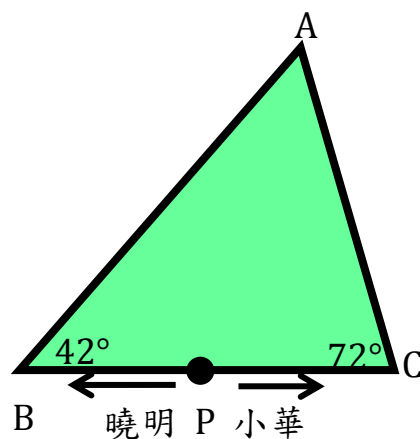
根據「大角對大邊」，所以  $\overline{BA} > \overline{CA}$ 。

又因為 P 是  $\overline{BC}$  的中點，所以  $\overline{PB} = \overline{PC}$ 。

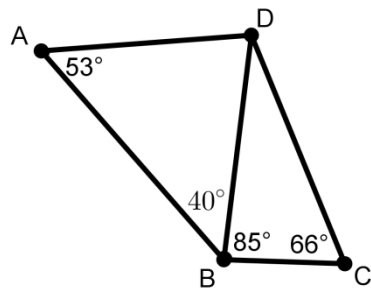
因此  $\overline{PB} + \overline{BC} > \overline{PC} + \overline{CA}$ ，

小華走的距離會比較短。

兩人的速率一樣，故小華會先抵達 A 點。



例題四：如圖，四邊形  $ABCD$  中， $\angle A=53^\circ$ 、  
 $\angle ABD=40^\circ$ 、 $\angle DBC=85^\circ$ 、 $\angle C=66^\circ$ ，則  $\overline{AD}$ 、  
 $\overline{BD}$  和  $\overline{CD}$  的大小關係為何？



◎解題思維：

四邊形  $ABCD$  被分成兩個三角形  $\triangle ABD$  跟  $\triangle BDC$ 。兩個三角形要比較邊長，除了用大角對大邊的性質，還要利用共同邊  $\overline{BD}$  進行判斷。

解：

$\triangle ABD$  中， $\angle A=53^\circ$ 、 $\angle ABD=40^\circ$ ，所以  $\angle A > \angle ABD$ 。

故  $\overline{BD} > \overline{AD}$  .....(1) (大角對大邊)

$\triangle BCD$  中， $\angle DBC=85^\circ$ 、 $\angle C=66^\circ$ ，所以  $\angle DBC > \angle C$ 。

故  $\overline{CD} > \overline{BD}$  .....(2) (大角對大邊)

合併(1)、(2)， $\overline{CD} > \overline{BD} > \overline{AD}$ 。

重點提問

根據上面的課文，請說明一個三角形的內角與對邊會有什麼樣的關係。

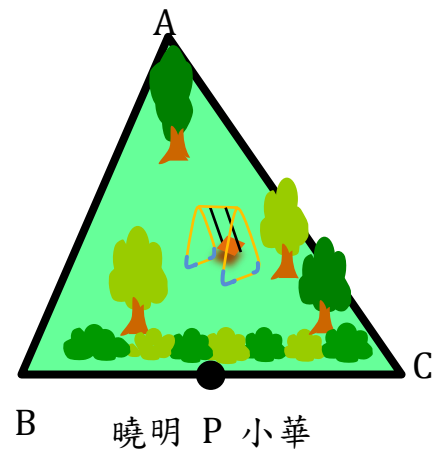


• 隨堂練習：

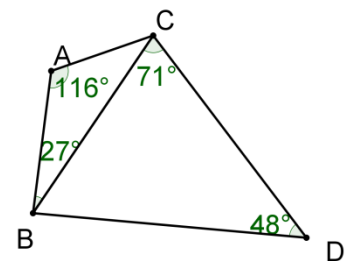
1.  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB}=6$ 、 $\overline{BC}=12$ 、 $\overline{CA}=11$ ，比較  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的大小關係為何？

2.  $\triangle ABC$  中， $\angle A=40^\circ$ 、 $\angle B=90^\circ$ ，比較  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$  的長短關係為何？

3. 如右圖是一個社區三角公園  $\triangle ABC$ ，其中  $\angle B=70^\circ$ 、 $\angle C=42^\circ$ 。已知曉明和小華從公園一邊  $\overline{BC}$  的中點  $P$ ，兩人同時反方向沿著三角公園跑，如果兩人的速率一樣，請問誰會先抵達  $A$  點？



4. 如圖，四邊形  $ABDC$  中， $\angle A=116^\circ$ 、 $\angle ABC=27^\circ$ 、 $\angle DCB=71^\circ$ 、 $\angle D=48^\circ$ ，則  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{DB}$  和  $\overline{DC}$  的大小關係為何？



還是不太懂，請看下面影片



<https://youtu.be/RRianpZiwas>