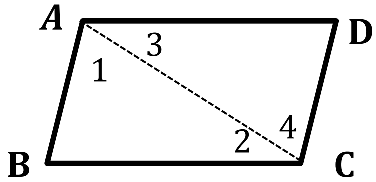
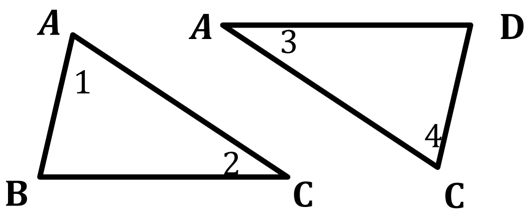
單元二　平行四邊形

課文A：　平行四邊形的基本性質

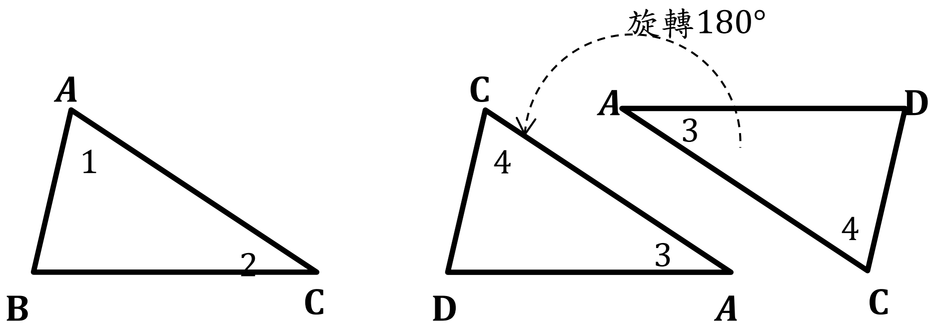
如上圖，如果我們將這個平行四邊形沿著對角線 $\overline{AC}$ 剪下來，會發生什麼事呢？請各位同學拿剪刀將附件一的平行四邊形 *ABCD* 剪下來！



剪下後，平行四邊形 *ABCD* 會形成兩個三角形△*ABC* 跟△*CDA*，這兩個三角形有什麼關係呢？

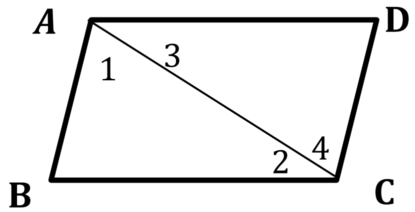


試著疊疊看，看看會發生什麼事呢？

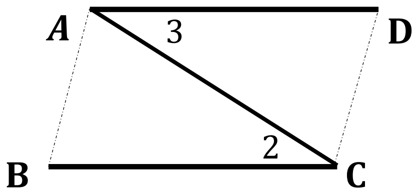


得到∠2=∠3 且∠1=∠4。

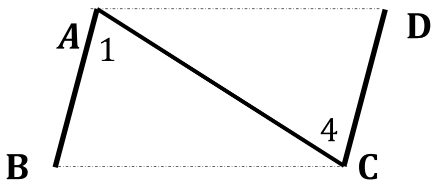
我們也可以利用平行線的截角性質來證明「$\angle 2=\angle 3$ 且 $\angle 1=\angle 4$」。



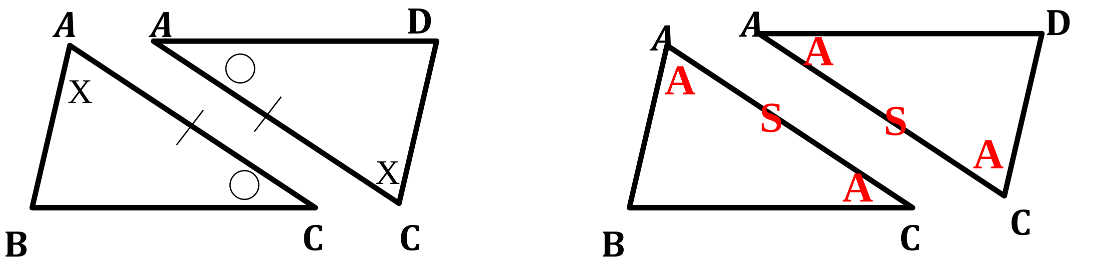
如下圖，因為 $\overline{AD}//\overline{BC}$，所以 $\angle 2=\angle 3$。



同理，因為 $\overline{AB}//\overline{CD}$，所以 $\angle 1=\angle 4$。



前面已經證明了 $\angle 1=\angle 4$、$\angle 2=\angle 3$ ；又 $\overline{AC}=\overline{AC}$，根據 ASA 全等性質，得到 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$。

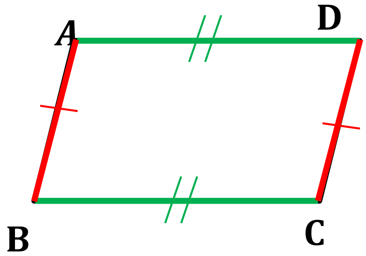


如果沿著另外一條對角線 $\overline{BD}$ 切割也會有同樣的結果。

由前面的操作與證明可以說明平行四邊形的一個性質：任何一條對角線可以將平行四邊形平分成兩個全等的三角形。

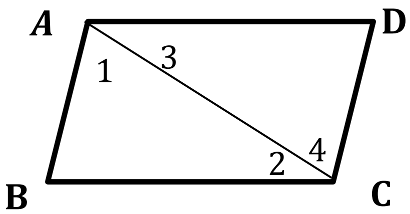
從上面的操作及證明可以知道△ABC≅△CDA，所以 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 、

$\overline{BC}=\overline{DA}$ 。而在平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 、 $\overline{BC}$ 與 $\overline{DA}$ 分別是對邊關係，這也說明平行四邊形的另一個性質：兩組對邊分別等長。

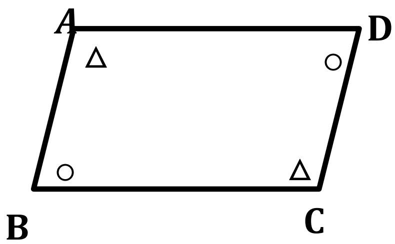


從上面的操作及證明可以知道△ABC≅△CDA，其中∠B 和∠D 是對應角、∠1 和∠4 是對應角、∠2 和∠3 是對應角，兩全等的三角形對應角會相等，所以∠B=∠D、∠1=∠4、∠2=∠3。

而在平行四邊形 $ABCD$ 中，∠B 與∠D、∠A 與∠C 分別是對角關係：

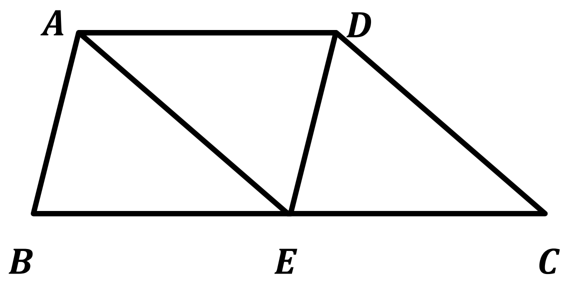


∠B=∠D 已經確定了，那∠A 與∠C 呢？因為∠1=∠4、∠2=∠3，所以∠A=∠1+∠3=∠2+∠4=∠C。這也說明平行四邊形的第三個性質：兩組對角分別相等。



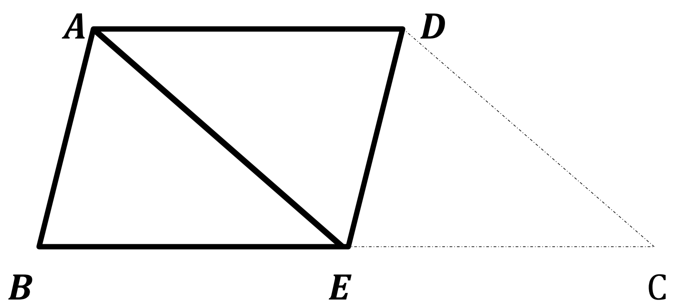
接下來我們來練習使用這三個平行四邊形的性質！

例題一：如下圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$ ，在 $\overline{BC}$ 上有一點 E，而且 $\overline{AE}//\overline{CD}$ 、$\overline{DE}//\overline{AB}$。若△$ABE$ 面積為 12，求梯形 $ABCD$ 面積為何？



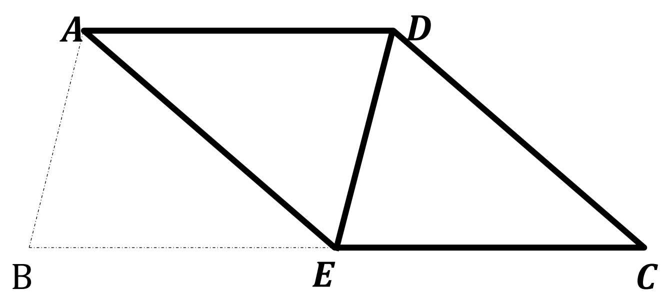
◎解題思維：

先看四邊形 $ABED$，$\overline{AD}//\overline{BC}$ ，$\overline{DE}//\overline{AB}$，所以四邊形 $ABED$ 是平行四邊形，而 $\overline{AE}$ 是對角線。



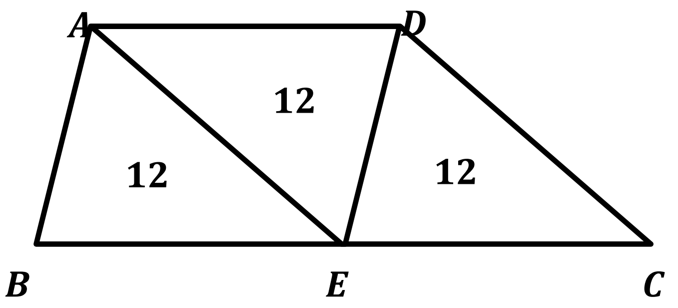
根據「對角線可以將平行四邊形平分成兩個全等的三角形」性質，所以△ABE 面積=△ADE 面積。

同樣地，四邊形 AECD 也是如此。



根據「對角線可以將平行四邊形平分成兩個全等的三角形」性質，所以△ADE 面積=△DEC 面積。

解：

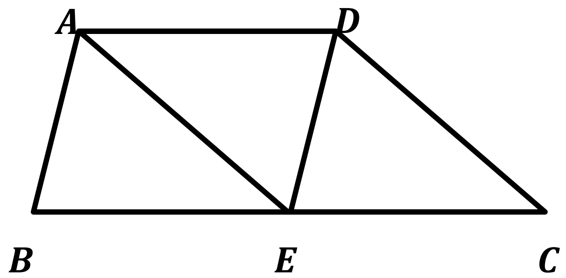


因此△ABE 面積=△ADE 面積=△DEC 面積=12，

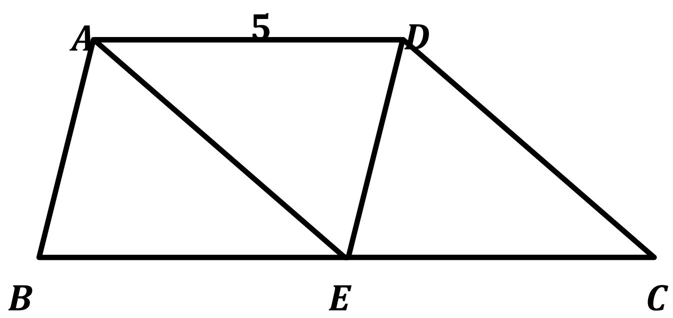
梯形 $ABCD$ 面積=△ABE 面積+△ADE 面積+△DEC 面積=12+12+12=36

例題二：如下圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$ ，在 $\overline{BC}$ 上有一點 E，而且

$\overline{AE}//\overline{CD}$ 、$\overline{DE}//\overline{AB}$ 。若 $\overline{AD}$=5，求 $\overline{BC}$ =？

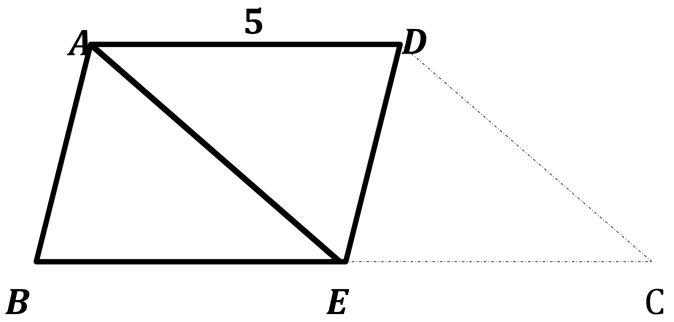


◎**解題思維：**給的資訊是 $\overline{AD}$=5，要求 $\overline{BC}$ 。



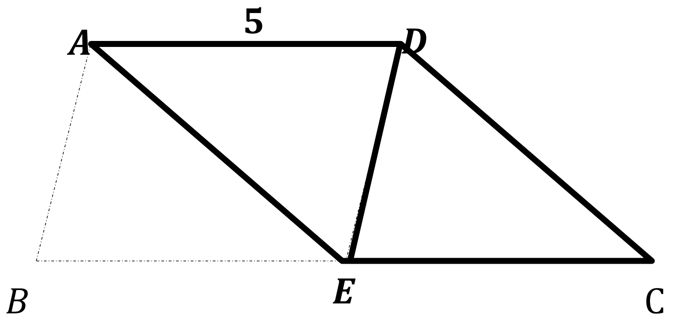
$\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EC}$ ，也就是求出 $\overline{BE}$ 和 $\overline{EC}$ ，就可以算出 $\overline{BC}$ 。

$\boxed{\text{解}}$：如同例題一所討論的，$\overline{AD}//\overline{BC}$ 而且 $\overline{DE}//\overline{AB}$，所以可以知道四邊形 $ABED$ 就是一個平行四邊形，先只看平行四邊形 $ABED$：



根據「平行四邊形的兩組對邊分別等長」性質，所以 $\overline{BE}=\overline{AD}$=5。

此外，如同例題一所討論的，$\overline{AD}//\overline{BC}$ 而且 $\overline{AE}//\overline{CD}$，所以也可以知道四邊形 $AECD$ 也是一個平行四邊形，只看平行四邊形 $AECD$：

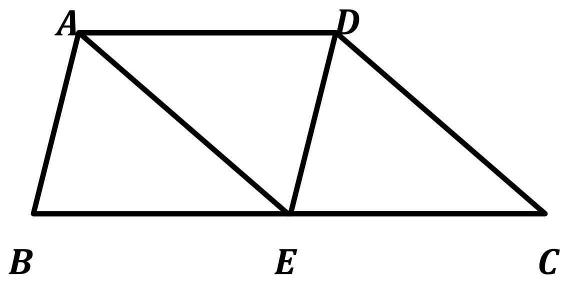


根據「平行四邊形的兩組對邊分別等長」性質，所以 $\overline{EC}=\overline{AD}$=5。

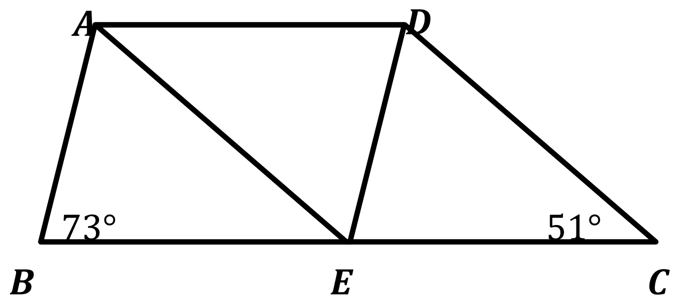
因此 $\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EC}$ =5+5=10。

例題三：如下圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$ ，在 $\overline{BC}$ 上有一點 E，而且

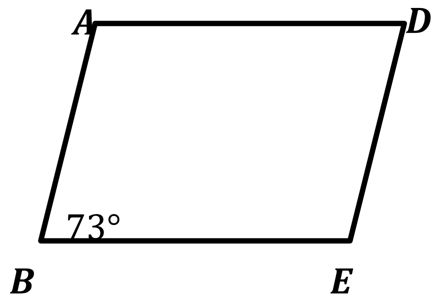
$\overline{AE}//\overline{CD}$ 、$\overline{DE}//\overline{AB}$ 。若∠B=73°，∠C=51°，求∠AED 的度數為何？



$\boxed{解}$：題目給的條件是∠B=73˚，∠C=51˚，要求∠AED 的度數。

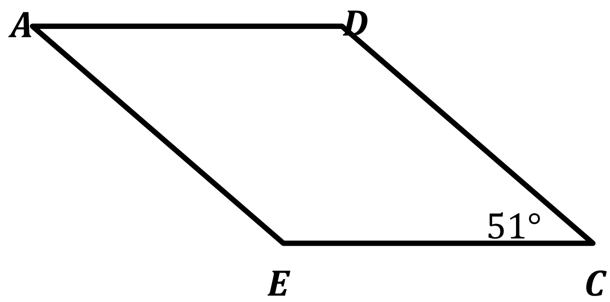


同樣的，四邊形 $ABED$ 就是一個平行四邊形，先只看平行四邊形 $ABED$：

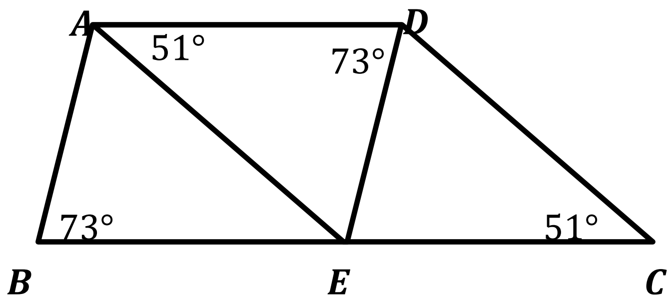


根據「平行四邊形的兩組對角分別相等」性質，所以∠ADE=∠B=73˚。

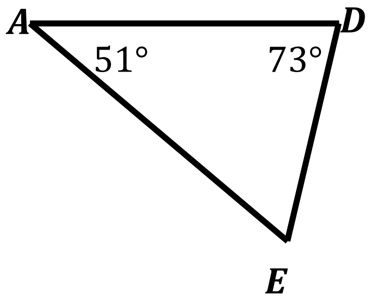
四邊形 $AECD$ 也是一個平行四邊形，只看平行四邊形 $AECD$：



根據「平行四邊形的兩組對角分別相等」性質，所以 $\angle EAD=\angle C=51^\circ$。

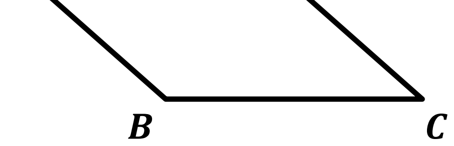


要求 $\angle AED$ 的角度，可以再看一下 $\triangle AED$。



當中知道了 $\angle ADE=73^\circ$、$\angle EAD=51^\circ$，所以 $\angle AED=180^\circ-73^\circ-51^\circ=56^\circ$。

例題四：如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=x^\circ$、$\angle B=(4x+2y)^\circ$、$\angle C=2y^\circ$，求 x、y 的值。



◎**解題思維：**

在平行四邊形中，∠A 與∠C 是一組對角，而「平行四邊形的兩組對角分別相等」。另外，∠A 與∠B 是一組同側內角，它們有何關係呢?

$\boxed{解}$：

平行四邊形 $ABCD$ 中，∠A 是∠C 的對角，根據「平行四邊形的對角相等」，所以∠A=∠C。

平行四邊形 $ABCD$ 中，∠A 與∠B 是一組同側內角，因為對邊平行，所以∠A+∠B=180˚。

$$\begin{cases} \angle A + \angle B = 180° : & x° + (4x+2y)° = 180° \\ \angle A = \angle C : & x° = 2y° \end{cases}$$

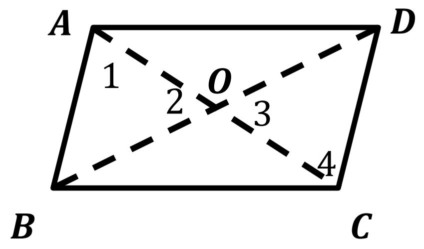
$$\Rightarrow \begin{cases} x + (4x+2y) = 180 \\ x = 2y \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 180 \cdots (1) \\ x = 2y \quad \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

將(2)式代入(1)式：$5\times 2y+2y=180 \Rightarrow 12y=180 \Rightarrow y=15$

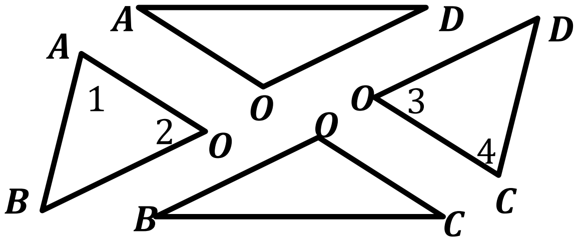
代回(2)式：$x=2\times 15=30$

下一個要介紹的平行四邊形特性會跟兩條對角線有關。

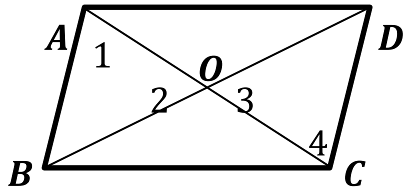
右下圖為平行四邊形 ABCD，兩條對角線為$\overline{AC}$、$\overline{BD}$，這兩條對角線有什麼關係呢？各位同學拿剪刀將附件二的平行四邊形 $ABCD$ 剪下來，再沿著對角線剪開。



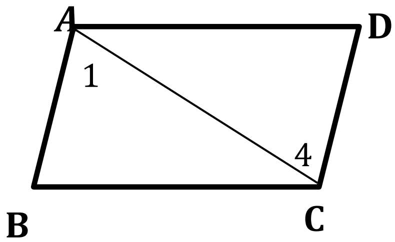
剪開後會有四個三角形



平行四邊形 *ABCD* 中，兩條對角線為 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 。

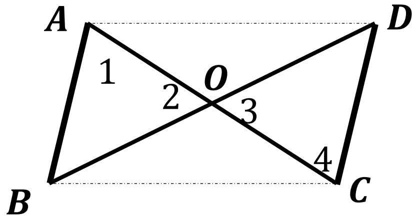


在之前證明過，對角線 $\overline{AC}$ 會將平行四邊形 *ABCD* 形成兩個全等的三角形△*ABC* 跟△*CDA*：



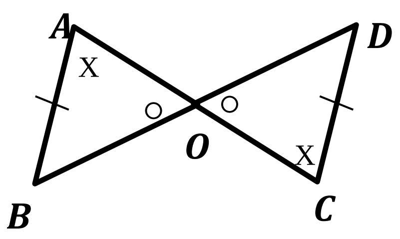
所以 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 、 $\angle 1=\angle 4$。

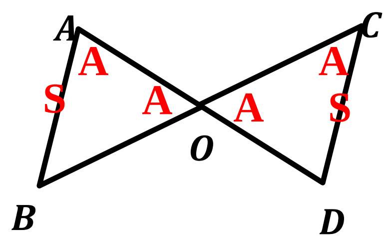
再畫另一對角線 $\overline{BD}$ 會與 $\overline{AC}$ 交 *O* 點，主要看△*AOB* 和△*COD* 兩個三角形：



∠2 和∠3 為對頂角，所以 ∠2=∠3。

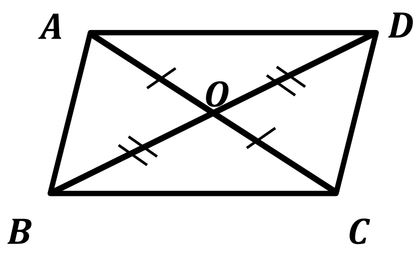
$\overline{AB}=\overline{CD}$ 、∠1=∠4、∠2=∠3，在△AOB 中，$\overline{AB}$ 是∠1 的鄰邊；在△COD 中，$\overline{CD}$ 是∠4 的鄰邊。所以根據 AAS 全等性質，△AOB≅△COD。



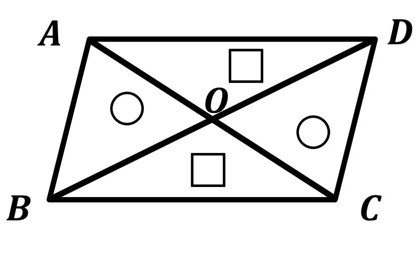


兩個全等的三角形其對應邊會相等，$\overline{AO}$ 和 $\overline{OC}$ 、$\overline{BO}$ 和 $\overline{OD}$ 為兩組對應邊，所以 $\overline{AO}=\overline{OC}$ 、$\overline{BO}=\overline{OD}$ 。

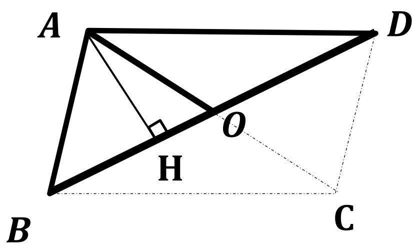
這就是平行四邊形第四個性質：兩條對角線會互相平分。



由前面的實驗及證明可以知道△AOB≅△COD、△AOD≅△COB，也就是△AOB 面積=△COD 面積、△AOD 面積=△COB 面積。



我們再來看△AOB 與△AOD ，過 A 點作與 $\overline{BD}$ 垂直的線 $\overline{AH}$ ：



$\triangle AOB$ 面積$=\overline{BO}\times\overline{AH}\times\frac{1}{2}$；$\triangle AOD$ 面積$=\overline{DO}\times\overline{AH}\times\frac{1}{2}$

因為平行四邊形的兩條對角線會互相平分，所以$\overline{BO}=\overline{DO}$，

得到$\triangle AOB$ 面積=$\triangle AOD$ 面積。

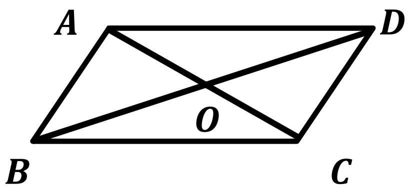
因此$\triangle AOB$ 面積=$\triangle COD$ 面積=$\triangle AOD$ 面積=$\triangle COB$ 面積，

也就是平行四邊形 ABCD 的兩條對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$所分成的四個三角形$\triangle AOB$、$\triangle COD$、$\triangle AOD$、$\triangle COB$ 面積會一樣。

平行四邊形的第五個性質為：兩條對角線會將平行四邊形分成四個面積一樣的三角形。

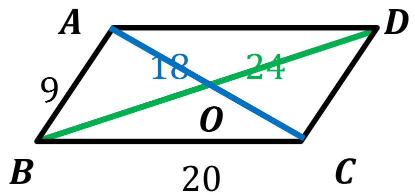
例題五：如下圖，平行四邊形 $ABCD$ 兩對角線交於 O 點，

若$\overline{AB}$=9、$\overline{BC}$=20、$\overline{AC}$=18、$\overline{BD}$=24，求$\triangle BOC$ 的周長。

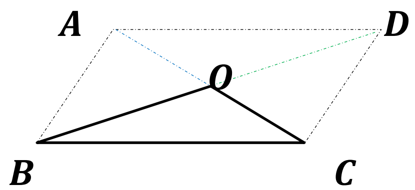


◎**解題思維：**

我們將題目當中給的資訊$\overline{AB}$=9、$\overline{BC}$=20、$\overline{AC}$=18、$\overline{BD}$=24，標到圖上：



想求的是$\triangle BOC$的周長。



$\triangle BOC$的周長$=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}$，這當中的$\overline{BC}$已經知道了。

$\boxed{\text{解}}$：

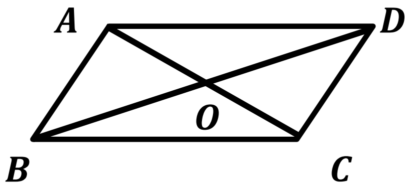
因為平行四邊形的兩條對角線會互相平分，所以$\overline{OB}$是對角線$\overline{BD}$的一半、$\overline{OC}$是對角線$\overline{AC}$的一半。

因此$\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 24=12$、$\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 18=9$，

$\triangle BOC$的周長$=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}=12+9+20=41$。

例題六：如下圖，平行四邊形 $ABCD$ 兩對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 O 點，

若△BOC 面積=39，求平行四邊形 $ABCD$ 的面積。



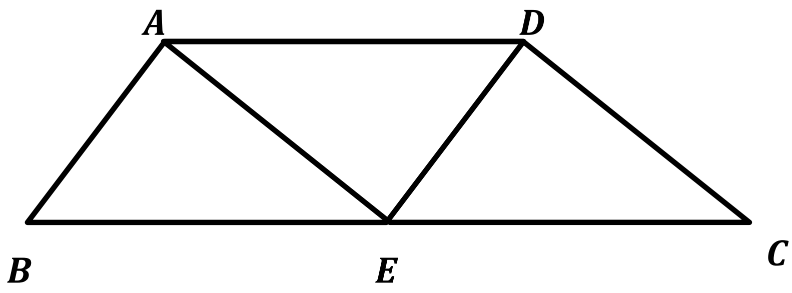
$\boxed{解}$：因為△AOB 面積=△BOC 面積=△COD 面積=△DOA 面積=39，所以平行四邊形 $ABCD$=4×39=156。

重點提問

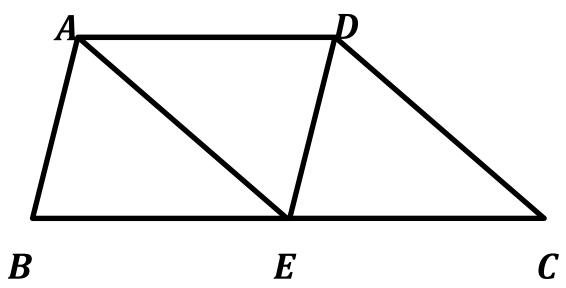
1.根據上面的課文，請問平行四邊形有哪些性質？

• 隨堂練習：

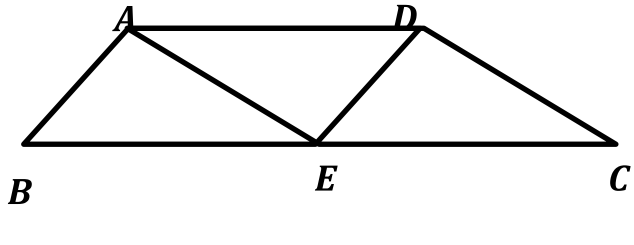
1.如下圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，在 $\overline{BC}$ 上有一點 E，而且 $\overline{AE}//\overline{CD}$、$\overline{DE}//\overline{AB}$。若平行四邊形 $ABED$ 面積為 48，求梯形 $ABCD$ 面積為何？



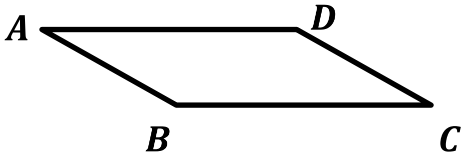
2. 如下圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，在 $\overline{BC}$ 上有一點 E，而且 $\overline{AE}//\overline{CD}$、$\overline{DE}//\overline{AB}$。若 $\overline{BC}=18$，求 $\overline{AD}=$？



3. 如下圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，在 $\overline{BC}$ 上有一點 E，而且 $\overline{AE}//\overline{CD}$、$\overline{DE}//\overline{AB}$。若 $\angle B=60^\circ$，$\angle C=30^\circ$，求 $\angle AED$ 角度為何？

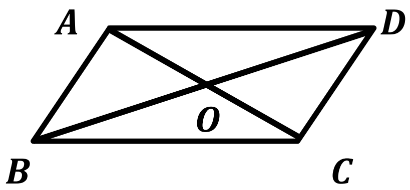


4.如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=x^\circ$、$\angle B=(4x+30)^\circ$，求 x 的值。



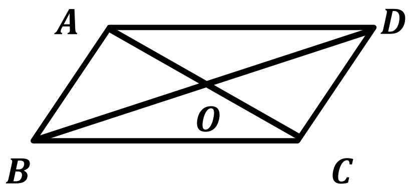
5.如下圖，平行四邊形 $ABCD$ 兩對角線交於 O 點，

若 $\overline{AB}=3$、$\overline{BC}=6$、$\overline{AC}=6$、$\overline{BD}=8$，分別求△BOC 和△AOB 的周長。



6.如下圖，平行四邊形 $ABCD$ 兩對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 O 點，

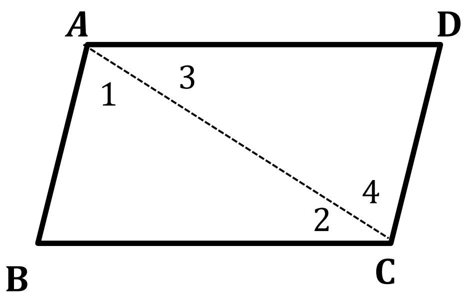
若平行四邊形 $ABCD$ 面積=48，求△AOB 的面積。



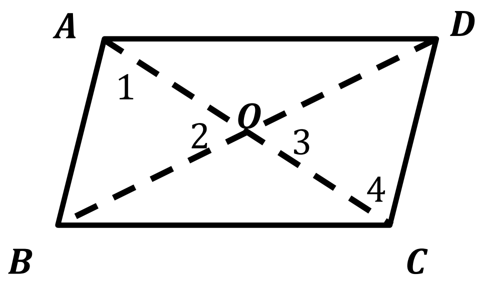
還是不太懂，請看下面影片

課文(一) https://youtu.be/vOmtjhYY75M	例題四+更多例題 https://youtu.be/L9zbuPZI7N4
例題五、六 https://youtu.be/fofz0uvE6mg	更多例題 https://youtu.be/xtoLHJSfmS0

附件一



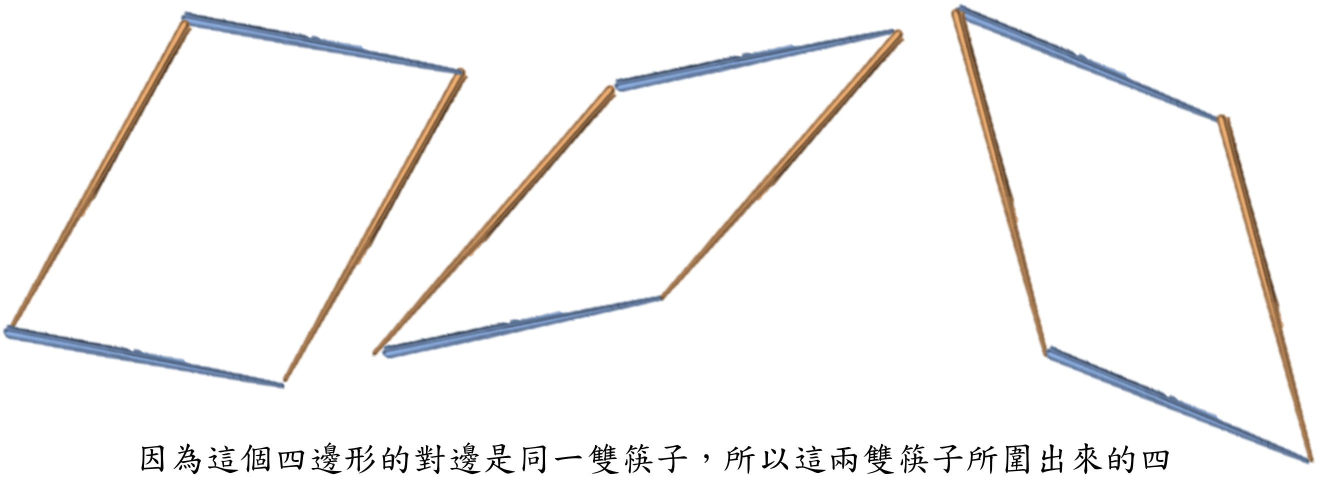
附件二



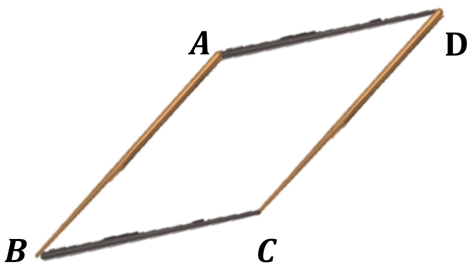
課文B：　平行四邊形的判別性質

什麼是平行四邊形的判別性質呢？就是當一個四邊形我們不知道它是不是平行四邊形的時候，我們可以利用這些性質來判別它是不是平行四邊形。

當我們拿出兩雙筷子，這兩雙筷子不一定要一樣長，也可以一雙較長的、一雙較短的。再用這兩雙筷子來圍出一個四邊形，而且同一雙筷子要互為對邊。圍出四邊形後，可以觀察看看這種四邊形有什麼特別的地方。

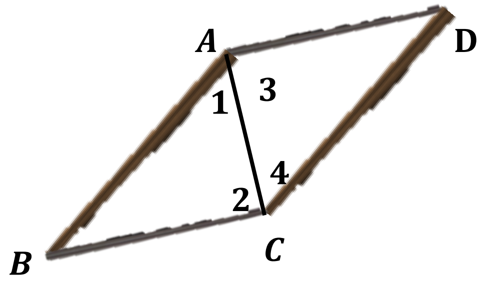


因為這個四邊形的對邊是同一雙筷子，所以這兩雙筷子所圍出來的四邊形就是兩組對邊等長的四邊形，而這種四邊形會是平行四邊形嗎?我們證明看看！下圖中，$\overline{AB}=\overline{CD}$、$\overline{BC}=\overline{DA}$：



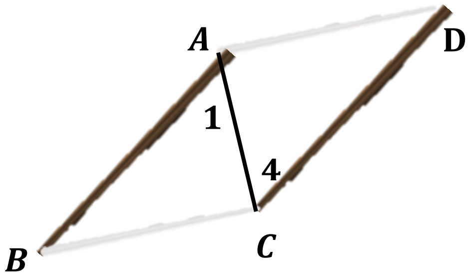
我們想證明這個四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形，就要證明是否 $\overline{AB}//\overline{CD}$ 且 $\overline{BC}//\overline{DA}$。

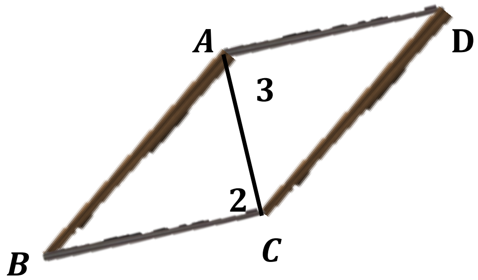
先連接$\overline{AC}$，$\overline{AC}$將 ∠A 分成∠1 和∠3、將∠C 分成∠2 和∠4：



因為$\overline{AB}=\overline{CD}$、$\overline{BC}=\overline{DA}$，而且共用邊$\overline{AC}=\overline{AC}$，根據 SSS 全等性質，所以$\triangle ABC\cong\triangle CDA$，可得∠1=∠4 且∠2=∠3。

如下圖，因為∠1=∠4，所以$\overline{AB}//\overline{CD}$；因為∠2=∠3，所以$\overline{BC}//\overline{DA}$。



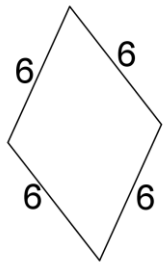


因此四邊形 ABCD 為一個平行四邊形。

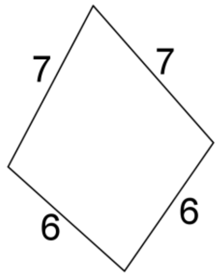
這就是平行四邊形的判別性質之一：如果四邊形有兩組對邊等長，那麼這四邊形必為平行四邊形。

例題一：判斷下列四邊形是否為平行四邊形。

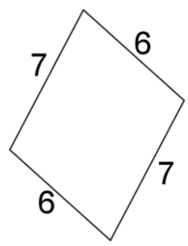
(1)



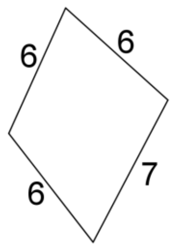
(2)



(3)



(4)



◎解題思維：

這題給的四個選項都是給四邊形的四個邊，所以可以依據「四邊形有兩組對邊等長，則此四邊形必為平行四邊形」的性質來判別。

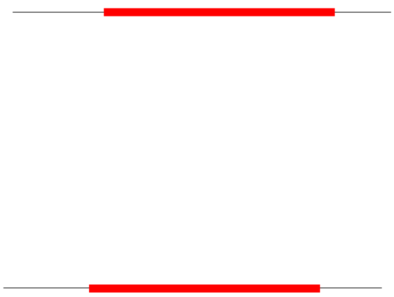
解：(1)這個四邊形的四邊都是 6，當然兩組對邊是等長的，所以這個四邊形是平行四邊形。

(2)這個四邊形的兩組對邊 6 與 7 都不等長，所以這個四邊形不是平行四邊形。

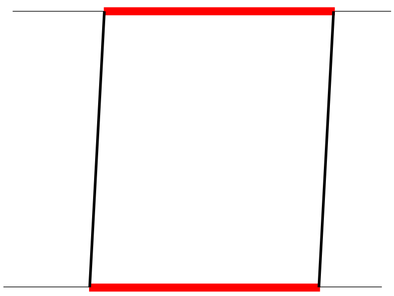
(3)這個四邊形的兩組對邊等長，一對都是 6，一對都是 7，所以這個四邊形是平行四邊形。

(4)這個四邊形的只有一組對邊 6 與 7 都不等長，所以這個四邊形不是平行四邊形。

同樣我們先來想一個情境，下圖中有 2 根紅色的扣條，這 2 根紅色的扣條長度一樣而且平行：

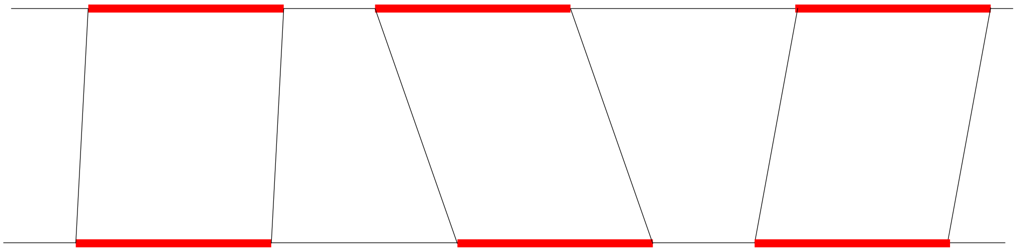


以直線連接扣條的兩端而形成一個四邊形：

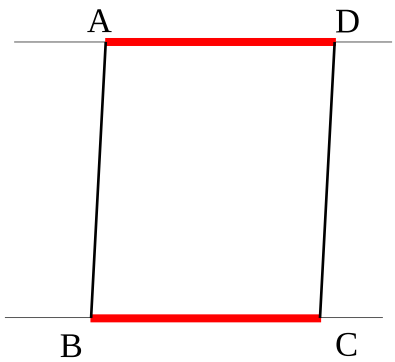


這一個四邊形會是一個平行四邊形嗎？

當扣條左右平移時仍然會是同樣的四邊形嗎？

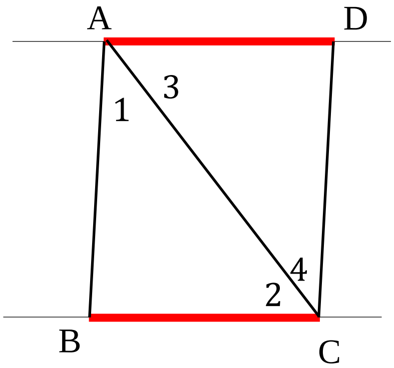


四邊形命名為四邊形 $ABCD$：



$\overline{DA}//\overline{BC}$ 而且 $\overline{DA}=\overline{BC}$ ，因此這個四邊形 $ABCD$ 就是一個有一組對邊等長且平行的四邊形。既然已經知道一組對邊平行了，如果另外一組對邊也平行，那麼這個四邊形就是一個平行四邊形。

先連接 $\overline{AC}$ ，$\overline{AC}$ 將∠A 分成∠1 和∠3、將∠C 分成∠2 和∠4：

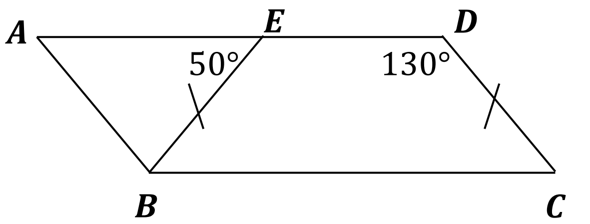


因為 $\overline{BC}=\overline{DA}$，且 $\overline{AC}=\overline{AC}$ ，又 $\overline{DA}//\overline{BC}$ ，$\overline{AC}$ 為其截線，所以∠2=∠3，根據 SAS 全等性質，可得△ABC≅△CDA，故∠1=∠4。

前面已經說明過，此時$\overline{AB}//\overline{CD}$且$\overline{BC}//\overline{DA}$，因此四邊形 $ABCD$ 為一個平行四邊形。

這也是平行四邊形的判別性質之一：如果四邊形有一組對邊等長且平行，那麼這四邊形必為平行四邊形。

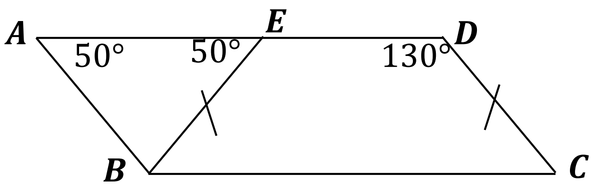
例題二：如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}//\overline{CD}$，$\overline{BE}=\overline{CD}$，$\angle D$=130°，$\angle BEA$=50°。請證明四邊形 $ABCD$ 為一個平行四邊形。



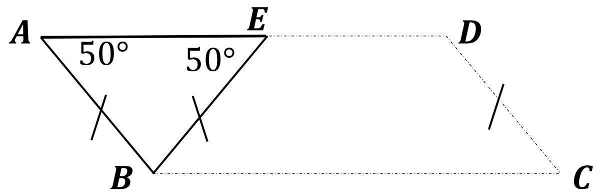
◎解題思維：

已知$\overline{AB}$與$\overline{CD}$平行，再觀察$\overline{AB}$與$\overline{CD}$有沒有等長，如果$\overline{AB}//\overline{CD}$而且$\overline{AB}=\overline{CD}$，就可以根據「四邊形有一組對邊等長且平行，則這四邊形為平行四邊形」的性質來判別。

解：因為$\overline{AB}//\overline{CD}$，所以$\angle A+\angle D$=180°。$\angle D$=130°，因此$\angle A$=50°。



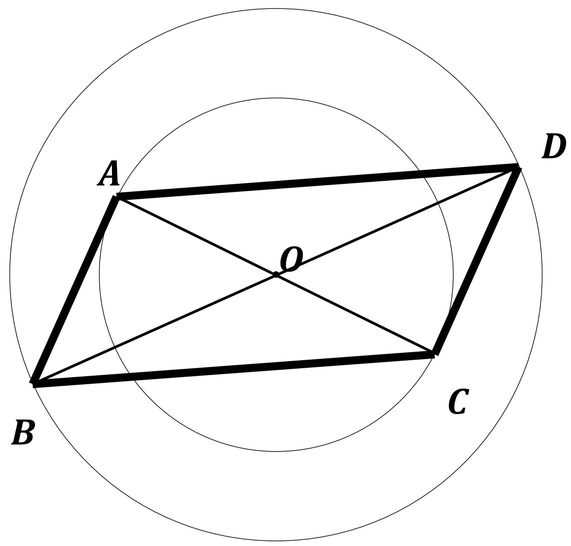
可以知道△ABE 為一個等腰三角形，兩腰$\overline{AB}=\overline{BE}$。



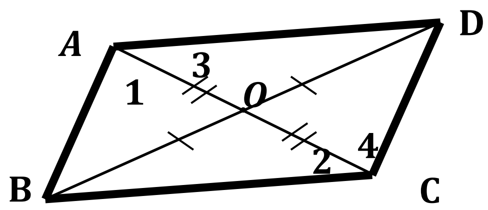
已知 $\overline{BE}=\overline{CD}$，得 $\overline{AB}=\overline{CD}$，且 $\overline{AB}//\overline{CD}$，所以四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

下圖有兩個不同大小的圓，圓心都在同一點。

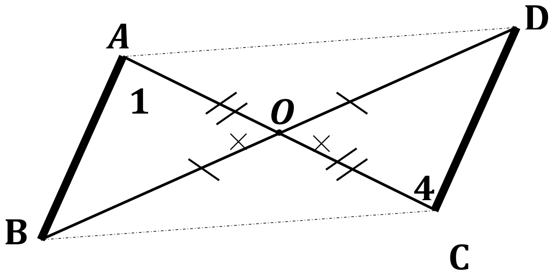
先在小圓上找出一條直徑 $\overline{AC}$ 後，接著在大圓上找出另外一條與小圓直徑不重合的直徑 $\overline{BD}$。最後以這兩條直徑 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 作為對角線，形成四邊形 $ABCD$。這個四邊形 $ABCD$ 會是平行四邊形嗎？



對角線 $\overline{AC}$ 將∠A 分成∠1 和∠3、將∠C 分成∠2 和∠4：

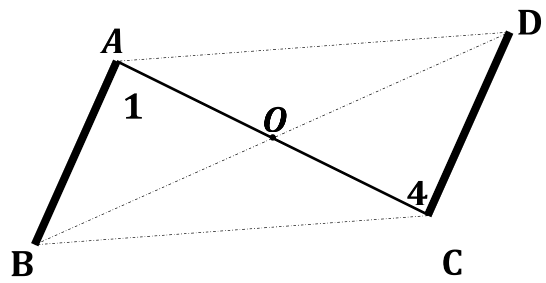


先看△AOB 與△COD 這兩個三角形：



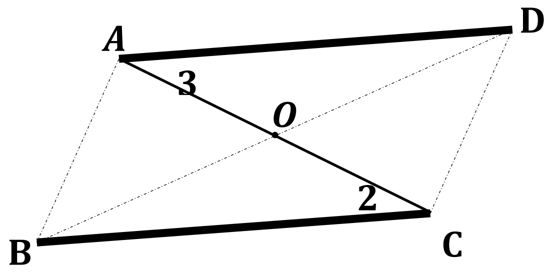
因為 $\overline{OA}=\overline{OC}$ 、$\overline{OB}=\overline{OD}$，$\angle AOB$ 與 $\angle COD$ 是對頂角，對頂角相等 $\angle AOB$=COD。根據 SAS 全等性質，$\triangle AOB \cong \triangle COD$。$\angle 1$ 的對應角是 $\angle 4$，所以 $\angle 1=\angle 4$。

觀察 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的關係，$\overline{AC}$ 為其截線：



截角 $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 為內錯角，內錯角相等，所以 $\overline{AB}//\overline{CD}$ 。

同理，$\angle 3=\angle 2$，內錯角相等，所以 $\overline{DA}//\overline{BC}$ 。



因此四邊形 $ABCD$ 為一個平行四邊形。

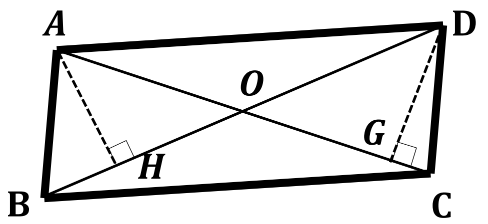
這也就是平行四邊形的判別性質之一：如果四邊形的兩條對角線會互相平分，那麼這四邊形必為平行四邊形。

例題三：如下圖，四邊形 $ABCD$ 中，兩對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 O 點，

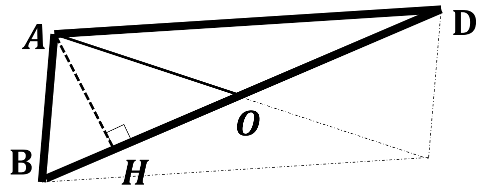
$\overline{AH}\perp\overline{BD}$ 、 $\overline{DG}\perp\overline{AC}$ ，而且 $\overline{AH}=3$、 $\overline{DG}=4$，

$\triangle AOB$ 面積=$\triangle BOC$ 面積=$\triangle COD$ 面積=$\triangle DOA$ 面積=24。

請證明四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



$\boxed{解}$：我們要先看$\triangle AOB$ 與$\triangle AOD$ 這兩個三角形：

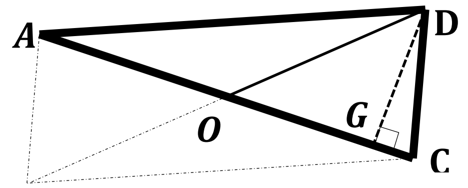


$\triangle$AOB 面積=$\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AH}$ $\Rightarrow 24=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times 3$ $\Rightarrow\overline{OB}=16$

$\triangle$AOD 面積=$\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times\overline{AH}$ $\Rightarrow 24=\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times 3$ $\Rightarrow\overline{OD}=16$

所以$\overline{OB}=\overline{OD}=16$。

再看$\triangle DOA$ 與$\triangle DOC$ 這兩個三角形：



$\triangle$DOA 面積=$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{DG}$ $\Rightarrow 24=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times 4$ $\Rightarrow\overline{OA}=12$

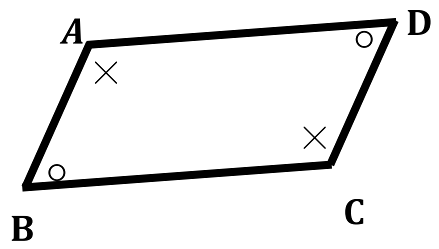
$\triangle$DOC 面積=$\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{DG}$ $\Rightarrow 24=\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times 4$ $\Rightarrow\overline{OC}=12$

所以$\overline{OA}=\overline{OC}=12$。

因為$\overline{OB}=\overline{OD}$、$\overline{OA}=\overline{OC}$，四邊形的兩條對角線會互相平分，

所以四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

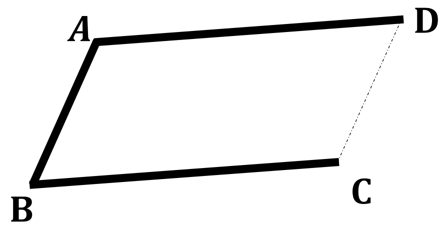
下圖四邊形 $ABCD$ 中，兩組對角相等，$\angle A=\angle C$、$\angle B=\angle D$：



想證明這個四邊 $ABCD$ 是平行四邊形，就要證明$\overline{AB}//\overline{CD}$而且$\overline{BC}//\overline{DA}$。

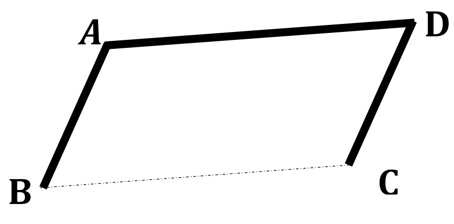
我們知道四邊形內角和為 360°，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$。又因為$\angle A=\angle C$、$\angle B=\angle D$，所以$\angle A+\angle B=180^\circ$，而且$\angle A+\angle D=180^\circ$。

觀察$\overline{DA}$與$\overline{BC}$的關係，$\overline{AB}$為其截線：



截角$\angle A$和$\angle B$為同側內角，$\angle A+\angle B=180^\circ$同側內角互補，所以$\overline{DA}//\overline{BC}$。

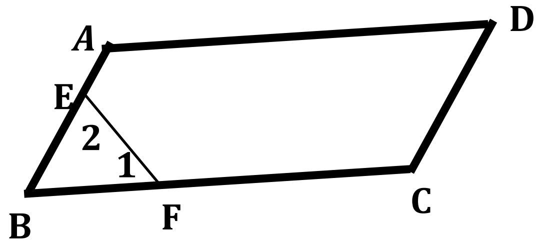
再觀察$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的關係，$\overline{DA}$為其截線：



截角$\angle A$和$\angle D$為同側內角，$\angle A+\angle D=180°$ 同側內角互補，所以$\overline{AB} // \overline{CD}$。因此四邊形 $ABCD$ 為一個平行四邊形。

這也就是平行四邊形的判別性質：如果四邊形的兩組對角會相等，那麼這四邊形必為平行四邊形。

例題四：如下圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C$，$\angle D=60^{\circ}$，$\angle 1=50^{\circ}$，$\angle 2=70^{\circ}$，則四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形？原因為何？



◎解題思維：

已經知道一組對角$\angle A$、$\angle C$相等了，再看看另外一組對角$\angle B$、$\angle D$有沒有相等。

解：

$\triangle BEF$ 中，$\angle 1=50^{\circ}$、$\angle 2=70^{\circ}$，

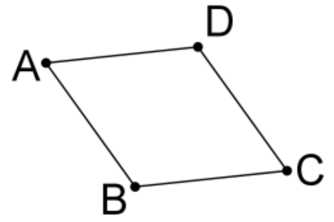
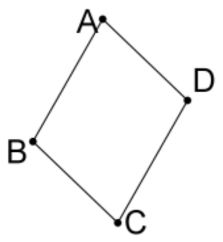
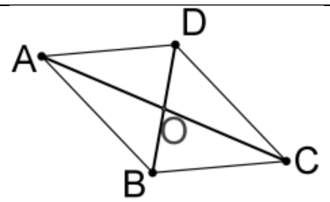
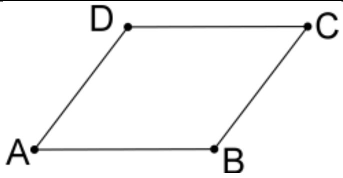
所以$\angle B=180^{\circ}-50^{\circ}-70^{\circ}=60^{\circ}$，得$\angle B=\angle D$。

根據平行四邊形的判別性質：「四邊形的兩組對角相等，則此四邊形為平行四邊形」，四邊形 $ABCD$ 是一個平行四邊形。

重點提問

1.根據上面的課文，請問判別平行四邊形的性質有哪些？

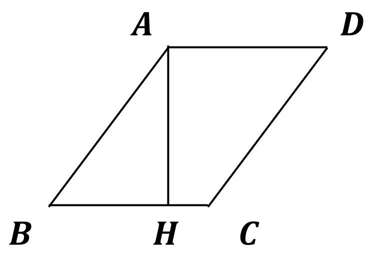
2.連連看，找出判別下列各四邊形 *ABCD* 為平行四邊形的方法：

 $\overline{AB}=\overline{CD}$ ， $\overline{BC}=\overline{DA}$	•	• 兩組對邊分別等長
 ∠A=∠C，∠B=∠D	•	• 一組對邊平行且等長
 $\overline{AO}=\overline{OC}$ ， $\overline{BO}=\overline{OD}$	•	• 兩組對角線互相平分
 $\overline{AD}//\overline{BC}$ ， $\overline{AD}=\overline{BC}$	•	• 兩組對角分別相等

• **隨堂練習：**

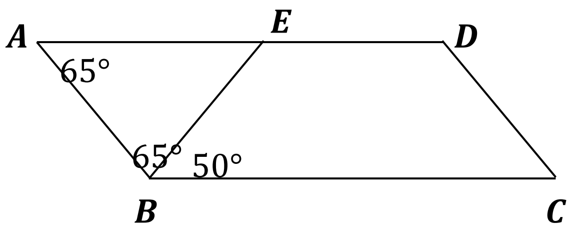
1.如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AH} \perp \overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}=5$，$\overline{AD}=\overline{AH}=4$，

$\overline{HC}=1$。則四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形？原因為何？



2.如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle ABE=65°$，$\angle EBC=50°$，$\overline{BE}+\overline{ED}=\overline{BC}$。

則四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形？原因為何？



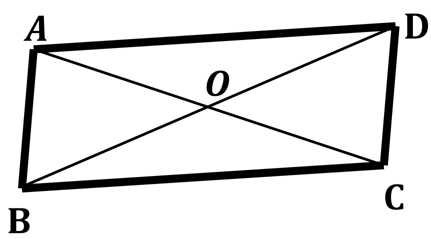
3.如圖，四邊形 $ABCD$ 中，兩對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 O 點，

$\triangle ABC$ 面積=$\triangle BCD$ 面積=$\triangle CDA$ 面積=24。則：

(1) 請問 $\overline{AO}$ 與 $\overline{OC}$ 是否等長？

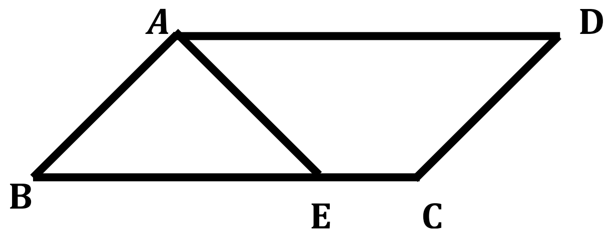
(2) 請問 $\overline{BO}$ 與 $\overline{OD}$ 是否等長？

(3) 則四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形？原因為何？



4.如下圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle AEB=\angle EAD=\angle D=45^\circ$，$\angle C=135^\circ$，

則四邊形 ABCD 是否為平行四邊形？原因為何？



還是不太懂，請看下面影片

平行四邊形判別性質 https://youtu.be/Sf-G8NjTCd8	更多例題 https://youtu.be/pyKifWPc_1U
更多例題 https://youtu.be/AIkl0YDEeQI	更多例題 https://youtu.be/-pDRPddoq7o