

單元二：利用乘法公式做因式分解

課文 A：利用平方差公式因式分解

這個單元我們將會利用第一單元學的乘法公式做因式分解，

首先我們先來學習如何利用平方差公式做因式分解。

先複習一下平方差的公式：

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

接下來就讓我們用四個例題做練習。

例題一：利用平方差公式因式分解下列各式

$$(1) x^2 - 4 \quad (2) y^2 - 1$$

◎解題思維：

若要利用平方差公式 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 做因式分解，

可以先觀察 $x^2 - 4$ 是否符合平方差的型態，

x^2 符合 a^2 的型態；4 可以改寫成 2^2 ，如下面的式子：

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$$
$$\boxed{a^2 - b^2}$$

接著便可以套用平方差公式 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 做因式分解。

解： $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

(2)

$$\text{解： } y^2 - 1 = y^2 - 1^2 = (y + 1)(y - 1)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

例題二：利用平方差公式因式分解下列各式

(1) $25a^2 - 9$ (2) $4x^2 - 9y^2$

◎解題思維(1)：

要利用平方差公式就是要“湊成某個的平方減掉某個的平方”。

$25a^2$ 要換成某個的平方， $25 = 5^2$ ， $25a^2 = 5^2a^2 = (5a)^2$ ；

9 改寫成 3^2 。如下面的式子：

$$25a^2 - 9 = (5a)^2 - 3^2$$
$$\boxed{\square^2 - \triangle^2}$$

接著便可以套用平方差公式做因式分解了！

$$\text{解： } 25a^2 - 9 = 5^2a^2 - 9 = (5a)^2 - 3^2 = (5a + 3)(5a - 3)$$

$$\boxed{\square^2 - \triangle^2 = (\square + \triangle)(\square - \triangle)}$$

(2)

解：

$$4x^2 - 9y^2 = 2^2x^2 - 3^2y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

例題三：利用平方差公式因式分解 $(2x - 3)^2 - 25$

◎解題思維：

我們要利用平方差公式就是要湊成 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 。

$(2x - 3)^2$ 很明顯已經是我們想要的形式了；25再換成 5^2 。

如下面的式子：

$$(2x - 3)^2 - 25 = \underbrace{(2x - 3)^2}_{a^2} - \underbrace{5^2}_{b^2}$$

接著便可以套用平方差公式 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 做因式分解。

解：

$$\begin{aligned} (2x - 3)^2 - 25 &= \underbrace{(2x - 3)^2}_{a^2} - \underbrace{5^2}_{b^2} = \underbrace{(2x - 3 + 5)}_{(a + b)} \underbrace{(2x - 3 - 5)}_{(a - b)} \\ &= (2x - 3 + 5)(2x - 3 - 5) \\ &= (2x + 2)(2x - 8) \\ &= 4(x + 1)(x - 4) \end{aligned}$$

還沒結束！還可以繼續分解。
因為 $(2x + 2)$ 還可以提出2；
 $(2x - 8)$ 也還可以提出2。

例題四：利用平方差公式因式分解下列各式

$$(1) (3x + 2)^2 - (2x - 1)^2 \quad (2) -(5x + 3)^2 + (2x + 1)^2$$

◎解題思維(1)：

$(3x + 2)^2 - (2x - 1)^2$ 剛好就已經是“某個平方減掉某個平方”了！

所以我們可以將 $(3x + 2)$ 當作是 a 、將 $(2x - 1)$ 當作是 b 。

有了 $a^2 - b^2$ 這個形式的式子後，

就可以套用平方差公式 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 做因式分解！

解：

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\ (3x + 2)^2 - (2x - 1)^2 &= [(3x + 2) + (2x - 1)][(3x + 2) - (2x - 1)] \\ &= (3x + 2 + 2x - 1)(3x + 2 - 2x + 1) \\ &= (5x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

◎解題思維(2)：

$-(5x + 3)^2 + (2x + 1)^2$ 這個式子的結構跟平方差的結構不太一樣，
將它對調一下變成 $(2x + 1)^2 - (5x + 3)^2$ 就跟 $a^2 - b^2$ 結構一樣了。

解： $-(5x + 3)^2 + (2x + 1)^2$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\ &= (2x + 1)^2 - (5x + 3)^2 \\ &= [(2x + 1) + (5x + 3)][(2x + 1) - (5x + 3)] \\ &= (2x + 1 + 5x + 3)(2x + 1 - 5x - 3) \\ &= (7x + 4)(-3x - 2) \end{aligned}$$

-3 和 -2 都是負的，
所以也可以都提出負號！

也可以 = $-(7x + 4)(3x + 2)$

我們從前面幾題練習可以發現，我們想利用平方差公式來因式分解，

我們只要想辦法湊成 $a^2 - b^2$ 這個結構，那麼我們就可以將它因式分解成

$(a + b)(a - b)$ 的這個樣子！

重點提問

1. 依據課文的意思，我們要利用平方差公式因式分解 $25x^2 - 16$ ，
湊成 $a^2 - b^2$ 這樣子的結構，就可以換成 $(a + b)(a - b)$ 。請問，
利用平方差公式因式分解 $25x^2 - 16$ 時， $25x^2 - 16$ 改成_____，
就符合 $a^2 - b^2$ 的結構；就可以將_____當 a 、將_____當 b ；
所以 $25x^2 - 16$ 就可以因式分解成_____。
2. 依據上面課文，利用平方差公式因式分解 $(2x + 3)^2 - (x + 1)^2$ ，
湊成 $a^2 - b^2$ 這樣子的結構，就可以換成 $(a + b)(a - b)$ 。
請問，利用平方差公式因式分解 $(2x + 3)^2 - (x + 1)^2$ 時，
就可以將_____當 a 、將_____當 b ；
 $(2x + 3)^2 - (x + 1)^2$ 就可以因式分解成_____。

• 隨堂練習：

1. 利用平方差公式因式分解下列各式

(1) $x^2 - y^2$

(2) $a^2 - 9$

2. 利用平方差公式因式分解下列各式

(1) $16x^2 - 9$

(2) $4a^2 - 25b^2$

3. 利用平方差公式因式分解下列各式

(1) $(x + 2)^2 - 4$

(2) $-25 + (2x - 3)^2$

4. 利用平方差公式因式分解下列各式

(1) $(3x + 1)^2 - (1 - 2x)^2$

(2) $-(x + 3)^2 + (2x + 3)^2$

還是不太懂，
請看下面影片(1)
利用乘法公式做因式
分解(例 1~例 2)



https://www.youtube.com/watch?v=ksd_sropQ0Y

還是不太懂，
請看下面影片(2)
利用乘法公式做因式
分解(例 3~例 4)



<https://www.youtube.com/watch?v=td9u3L-03BY>

課文 B：利用和的平方公式因式分解

接下來要看利用和的平方公式因式分解，

和的平方公式就是 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ 。

接下來我們從題目來看看如何應用和的平方公式進行因式分解！

例題一：利用和的平方公式因式分解 $x^2 + 6x + 9$

◎解題思維：

我們要利用和的平方公式因式分解 $x^2 + 6x + 9$ ，

跟前面的利用平方差公式因式分解一樣，需要湊出公式的結構，

要先將 $x^2 + 6x + 9$ 這個式子改成 $a^2 + 2ab + b^2$ 這樣的結構。

觀察一下 $x^2 + 6x + 9$ ，我們可以把 x 當成 a ；而 $6x = 2 \cdot x \cdot 3$ ，

最後，如果把 3 當成 b ，我們發現 9 就是 3 的平方。 $(9 = 3^2)$

如下面的式子：

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$$
$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2}$$

接著便可以套用平方差公式 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ 因式分解。

解： $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$

例題二：利用和的平方公式因式分解 $4x^2 + 20x + 25$

◎解題思維：

我們要利用和的平方公式因式分解 $4x^2 + 20x + 25$ ，

要先將 $4x^2 + 20x + 25$ 這個式子改成 $a^2 + 2ab + b^2$ 這樣的結構。

4 是 2 的平方，所以 $4x^2 = (2x)^2$ ，我們可以把 $2x$ 當成 a ；

而 $20x$ 可以拆成 2 乘 $2x$ 乘 5，也就是 $20x = 2 \cdot 2x \cdot 5$ 。

那我們把 5 當成 b ，檢查 $5^2 = 25$ ，25 剛剛好等於 5 的平方。

如下面的式子：

$$4x^2 + 20x + 25 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2$$

接著便可以套用平方差公式 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ 因式分解。

解： $4x^2 + 20x + 25 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = (2x + 5)^2$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

從前面幾題練習可以發現，我們想利用和的平方公式來因式分解，

我們只要想辦法湊成 $a^2 + 2ab + b^2$ 這個結構，那麼我們就可以將它

因式分解成 $(a + b)^2$ 的這個樣子！

重點提問

1. 依據課文的意思，要利用和的平方公式因式分解 $x^2 + 6x + 9$ ，

湊成 $a^2 + 2ab + b^2$ 這樣子的結構，就可以換成 $(a + b)^2$ 。

請問，利用平方差公式因式分解 $x^2 + 6x + 9$ 時，

$x^2 + 6x + 9$ 改成_____就符合 $a^2 + 2ab + b^2$ 的結構；

就可以將_____當 a 、將_____當 b ；

所以 $x^2 + 6x + 9$ 就可以因式分解成_____。

2. 依據課文的意思，要利用和的平方公式因式分解 $9x^2 + 12x + 4$ ，

湊成 $a^2 + 2ab + b^2$ 這樣子的結構，就可以換成 $(a + b)^2$ 。

請問，利用平方差公式因式分解 $9x^2 + 12x + 4$ 時，

$9x^2 + 12x + 4$ 改成_____就符合 $a^2 + 2ab + b^2$ 的結構；

就可以將_____當 a 、將_____當 b ；

所以 $9x^2 + 12x + 4$ 就可以因式分解成_____。

• 隨堂練習：

1. 利用和的平方公式因式分解 $x^2 + 8x + 16$

2. 利用和的平方公式因式分解 $a^2 + 4a + 4$

3. 利用和的平方公式因式分解 $4x^2 + 12x + 9$

4. 利用和的平方公式因式分解 $9x^2 + 18x + 9$

還是不太懂，
請看下面影片
利用乘法公式做因式分解
(例 1~例 2)



<https://www.youtube.com/watch?v=VPEEp0nx0yM>

課文 C：利用差的平方公式因式分解

接下來要看利用差的平方公式因式分解，

差的平方公式就是 $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ 。

我們從題目來看看如何應用差的平方公式進行因式分解！

例題一：利用差的平方公式因式分解 $x^2 - 20x + 100$

◎解題思維：

我們要利用差的平方公式因式分解 $x^2 - 20x + 100$ ，

只要湊成 $a^2 - 2ab + b^2$ 的結構，就可以換成 $(a - b)^2$ 。

看一下 $x^2 - 20x + 100$ ， x^2 明顯可以當成 a^2 ，也就是把 x 當成 a ；

而 $20x = 2 \cdot x \cdot 10$ ，那麼就是把 10 當成 b ；

檢查一下 $10^2 = 100$ ， 100 剛剛好等於 10 的平方。

如下面的式子：

$$x^2 - 20x + 100 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 10 + 10^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2$$

接著便可以換成 $(a - b)^2$ 了！

解： $x^2 - 20x + 100 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 10 + 10^2 = (x - 10)^2$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

例題二：利用差的平方公式因式分解 $9x^2 - 12x + 4$

◎解題思維：

我們要利用差的平方公式因式分解 $9x^2 - 12x + 4$ ，

要先將 $9x^2 - 12x + 4$ 這個式子湊成 $a^2 - 2ab + b^2$ 這樣的結構。

9 是 3 的平方，所以 $9x^2 = (3x)^2$ ，我們可以把 $3x$ 當成 a ；

而 $12x$ 可以拆成 2 乘 $3x$ 乘 2，也就是 $12x = 2 \cdot 3x \cdot 2$ 。

那我們把 2 當成 b ，檢查 $2^2 = 4$ ，4 剛剛好等於 2 的平方。

如下面的式子：

$$9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2$$
$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2}$$

接著便可以換成 $(a - b)^2$ 了！

解： $9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = (3x - 2)^2$

$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$$

例題三：利用差的平方公式因式分解 $(2x + 3)^2 - 10(2x + 3) + 25$

◎解題思維：

差的平方公式就是 $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ ，

$(2x + 3)^2 - 10(2x + 3) + 25$ 要符合 “ $a^2 - 2ab + b^2$ ” 形式！

我們可以將 $(2x + 3)$ 當作是 a ；將 25 換成是 5^2 ，所以把 5 當成 b ；

檢查一下中間的 $2ab$ ， $2 \times (2x + 3) \times 5$ 就是 $10(2x + 3)$ 。

有了 $a^2 - 2ab + b^2$ 這個形式的式子後，就可以換成 $(a - b)^2$ ！

如下面的式子：

$$\begin{aligned} &(2x + 3)^2 - 10(2x + 3) + 25 \\ &= (2x + 3)^2 - 2 \times (2x + 3) \times 5 + 5^2 = [(2x + 3) - 5]^2 \\ &\quad \underbrace{\quad a^2 \quad - 2 \quad a \quad b \quad + \quad b^2 = \quad (a - b)^2} \end{aligned}$$

再來進行整理就可以了！

解：

$$\begin{aligned} (2x + 3)^2 - 10(2x + 3) + 25 &= (2x + 3)^2 - 2 \times (2x + 3) \times 5 + 5^2 \\ &= [(2x + 3) - 5]^2 \\ &= (2x + 3 - 5)^2 \\ &= (2x - 2)^2 \\ &= [2(x - 1)]^2 \\ &= 2^2(x - 1)^2 \\ &= 4(x - 1)^2 \end{aligned}$$

仔細觀察會發現 $(2x - 2)$ 還可以提出 2！

從前面幾題練習可以發現，我們想利用差的平方公式來因式分解，

我們只要想辦法湊成 $a^2 - 2ab + b^2$ 這個結構，那麼我們就可以將它

因式分解成 $(a - b)^2$ 的這個樣子！

重點提問

1. 依據課文的意思，要利用差的平方公式因式分解 $x^2 - 6x + 9$ ，

湊成 $a^2 - 2ab + b^2$ 這樣子的結構，就可以換成 $(a - b)^2$ 。

請問，利用平方差公式因式分解 $x^2 - 6x + 9$ 時，

$x^2 - 6x + 9$ 改成_____就符合 $a^2 - 2ab + b^2$ 的結構；

就可以將_____當 a 、將_____當 b ；

所以 $x^2 - 6x + 9$ 就可以因式分解成_____。

2. 依據上面課文，要利用差的平方公式因式分解 $4x^2 - 20x + 25$ ，

湊成 $a^2 - 2ab + b^2$ 這樣子的結構，就可以換成 $(a - b)^2$ 。

請問，利用平方差公式因式分解 $4x^2 - 20x + 25$ 時，

$4x^2 - 20x + 25$ 改成_____就符合 $a^2 - 2ab + b^2$ 的結構；就

可以將_____當 a 、將_____當 b ；

所以 $4x^2 - 20x + 25$ 就可以因式分解成_____。

• 隨堂練習：

1. 利用差的平方公式因式分解 $x^2 - 16x + 64$

2. 利用差的平方公式因式分解 $16x^2 - 16x + 4$

3. 利用差的平方公式因式分解 $9x^2 - 6x + 1$

還是不太懂，
請看下面影片
利用乘法公式做因式分解
(例 1~例 2)



https://www.youtube.com/watch?v=xuS_-e9IfQ

4. 利用差的平方公式因式分解 $(3x + 7)^2 - 8(3x + 7) + 16$

課文 D：利用乘法公式做因式分解[進階]

接下來我們來看一些不能直接利用平方公式因式分解的題目。

例題一：因式分解 $3x^2 - 12x + 12$

◎解題思維：

這看起來好像可以使用差的平方。

但是如果我們使用差的平方，我們必須要將 $3x^2$ 改成某個的平方，

可是 3 不是某個整數的平方，那該怎麼辦呢？

我們仔細觀察一下，3、12、12 這三個數字剛好都有 3 的因數，

所以我們可以將 3 這個因數提出來，式子就會變成 $3(x^2 - 4x + 4)$ 。

提出 3 後，括號中的式子 $(x^2 - 4x + 4)$ 就是可以用乘法公式來因式分解的！

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x - 2)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

解： $3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4)$
 $= 3(x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) = 3(x - 2)^2$

例題二：因式分解 $-4x^2 - 8x - 4$

提出 -4

$$\begin{aligned}\text{解：} -4x^2 - 8x - 4 &= -4(x^2 + 2x + 1) \\ &= -4(x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) = -4(x + 1)^2\end{aligned}$$

重點提問

1. 依據課文的意思，我們可以利用乘法公式對多項式作因式分解，

請你依據下面題目的類型，填入較適合的乘法公式。

(A) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(B) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

(C) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

(1) $x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2$ 可以利用 _____ 來因式分解。

(2) $x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$ 可以利用 _____ 來因式分解。

(3) $y^2 - 5^2$ 可以利用 _____ 來因式分解。

(4) $(2x - 3)^2 + 2 \times (2x - 3) \times 5 + 5^2$ 可以利用 _____ 來因式分解。

(5) $(x - 3)^2 - 2 \times (x - 3) \times 4 + 4^2$ 可以利用 _____ 來因式分解。

(6) $(2x + 3)^2 - 5^2$ 可以利用 _____ 來因式分解。

(7) $2x^2 - 24x + 72$ 提出 _____ 後可以利用 _____ 來因式分解。

• 隨堂練習：

1. 因式分解 $5x^2 - 20x + 20$

2. 因式分解 $3(2x + 1)^2 + 6(2x + 1) + 3$

3. 因式分解 $-9x^2 - 54x - 81$

4. 因式分解 $x^4 - 1$

還是不太懂，
請看下面影片
利用乘法公式做因式分解
(例 1~例 2)



<https://www.youtube.com/watch?v=c-UDIdB6SiY>