

課文 D：利用配方法解 x^2 係數不為 1 的一元二次方程式

如果我們今天遇到 x^2 係數不為 1 的一元二次方程式，怎麼辦呢？

其實就把它變回去 x^2 係數為 1 的一元二次方程式就好了！

舉個例子！

我們要解 $3x^2 + x - 1 = 0$ 這個一元二次方程式，它的 x^2 係數是 3 啊！

因為是等式，所以等號左右同除以 3 依然相等：

$$\frac{3x^2}{3} + \frac{x}{3} - \frac{1}{3} = \frac{0}{3}$$

它的 x^2 係數變成 1 了：
$$x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$$

將 $-\frac{1}{3}$ 移項到等號右邊：
$$x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}$$

$x^2 + \frac{1}{3}x$ 想要配成完全平方，我們要集滿「 $a^2 + 2ab + b^2$ 」換成 $(a + b)^2$ 。

把 x^2 當成 a^2 ，就是把 x 當成 a ；那 $\frac{1}{3}x$ 就當成是 $2ab$ ，想一下

$$\frac{1}{3}x = 2 \cdot x \cdot \underline{\quad?} \quad , \text{問號會是 } \frac{1}{3} \text{ 的一半：} \frac{1}{6} \text{。}$$

$\frac{1}{3}x = 2 \cdot x \cdot \frac{1}{6}$ ，也就是把 $\frac{1}{6}$ 當成 b ；所以最後再加個 $(\frac{1}{6})^2$ 就集滿「 $a^2 + 2ab + b^2$ 」了。

而等號左邊要加上 $(\frac{1}{6})^2$ ，等號右邊當然也要加上 $(\frac{1}{6})^2$ ，才能維持等式成立：

$$x^2 + \frac{1}{3}x + (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{3} + (\frac{1}{6})^2$$

等號左邊：

$$x^2 + \frac{1}{3}x + (\frac{1}{6})^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{6} + (\frac{1}{6})^2 = (x + \frac{1}{6})^2$$
$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

等號右邊：

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + (\frac{1}{6})^2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{12}{3 \times 12} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{12}{36} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{13}{36} \end{aligned}$$

整個式子：

$$(x + \frac{1}{6})^2 = \frac{13}{36}$$

將 $(x + \frac{1}{6})$ 看成一整個東西，利用平方根的概念：

$$\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$$

$$\left(x + \frac{1}{6}\right) = \pm \sqrt{\frac{13}{36}}$$

$$x + \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{36}} \quad \text{或} \quad x + \frac{1}{6} = -\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{36}}$$

$$x + \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{13}}{6} \quad \text{或} \quad x + \frac{1}{6} = -\frac{\sqrt{13}}{6}$$

將 $+\frac{1}{6}$ 移項到等號右邊：

$$x = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6} \quad \text{或} \quad x = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \quad \text{或} \quad \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$$

重點提問

1. 請利用配方法解一元二次方程式 $2x^2 - 4x + 1 = 0$

• 隨堂練習：

1. 利用配方法解一元二次方程式 $2x^2 + 6x + 1 = 0$

2. 利用配方法解一元二次方程式 $3x^2 - 2x = 1$

還想多看幾題範例，
請看下面影片



[https://www.youtube.com/
watch?v=R0txIS8Dm0M](https://www.youtube.com/watch?v=R0txIS8Dm0M)

單元四：利用公式解一元二次方程式

課文 A：一元二次方程式的一般式

我們前面學過解一元二次方程式有兩種方法：因式分解法跟配方法，

接下來我們要來看最後一種解法：公式解。

在介紹這個公式之前，要先介紹「一元二次方程式的一般式」。

什麼是一元二次方程式的一般式呢？就是只要是一元二次方程式，都一定可以寫成「 $ax^2 + bx + c = 0$ 」的樣子，

「 $ax^2 + bx + c = 0$ 」就是一元二次方程式的一般式！

它真的能代表所有的一元二次方程式嗎？我們舉一些例子來試試看！

$3x^2 + 4x + 1 = 0$ ，明顯跟一般式「 $ax^2 + bx + c = 0$ 」完全符合，

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x + 1 = 0 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{array}$$

會發現 $3x^2 + 4x + 1 = 0$ 的 $a = 3$ 、 $b = 4$ 、 $c = 1$

那 $-x^2 + 3x = -1$ 呢？看起來好像不太像，但是我們可以移項一下。

等號右邊的 -1 移項到等號左邊變 $+1$ ，整個式子變成 $-x^2 + 3x + 1 = 0$ ，

符合一般式「 $ax^2 + bx + c = 0$ 」了。

$$\begin{array}{r} -x^2 + 3x + 1 = 0 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{array}$$

$-x^2$ 代表是 $-1 \cdot x^2$ ，所以 $a = -1$ 、 $b = 3$ 、 $c = 1$

再舉一個例子， $4x^2 - 5 = 0$ ，好像不太一樣，它只有兩項，但

$ax^2 + bx + c = 0$ 有三項，那怎麼辦？

很簡單， $4x^2 - 5 = 0$ 缺了 x 項，所以就補項 $+0x$ ，變成：

$$4x^2 + 0x - 5 = 0。$$

但是要注意「 $ax^2 + bx + c = 0$ 」每一項都是加的，所以把式子變成：

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 0x + (-5) = 0 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{array}$$

比對一下，就知道 $a = 4$ 、 $b = 0$ 、 $c = -5$ 。

如果你對找係數很熟悉的話，你也可以用係數來看，在一元二次方程式的一般式 $ax^2 + bx + c = 0$ 中， a 所代表的就是 x^2 的係數、 b 所代表的就是 x 的係數、 c 所代表的就是常數項。

再來看一下 $4x^2 - 5 = 0$ 這個一元二次方程式， x^2 的係數是 4；沒有 x 項，所以代表 x 項的係數是 0；常數項是 -5。因此 $a = 4$ 、 $b = 0$ 、 $c = -5$ 。

不管怎麼舉例，只要是一元二次方程式，都一定可以寫成一般式

「 $ax^2 + bx + c = 0$ 」的樣子，也可以找出 x^2 係數 a 、 x 的係數 b 、常數 c 。

重點提問

1. 根據上面的課文，請用自己的話解釋一下什麼是一元二次方程式的「一般式」。並舉出一個例子說明。

• 隨堂練習：

1. 請將下列一元二次方程式化為一般式「 $ax^2 + bx + c = 0$ 」的樣子，並找出各式的 a 、 b 、 c 。

(1) $3x^2 - 2x = 1$

(2) $x^2 = 3$

(3) $x^2 = 3x$

課文 B：利用公式解一元二次方程式

只要是一元二次方程式，都一定可以寫成一般式「 $ax^2 + bx + c = 0$ 」

的樣子，也可以找出 x^2 係數 a 、 x 的係數 b 、常數 c ，

然後我們就可以將 a 、 b 、 c 代入「 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 」這個公式，

而這個公式就是所謂的「公式解」。那這個公式是怎麼來的呢？

任何的一元二次方程式，都一定可以寫成一般式「 $ax^2 + bx + c = 0$ 」

的樣子，所以我們利用前面的配方法來解解看 $ax^2 + bx + c = 0$ 這個

一元二次方程式的解會是怎樣。

我們要解一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ，它的 x^2 係數是 a ，而

且因為它是一元二次方程式，所以 $a \neq 0$ 。

將它整個式子同除以 a ：
$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

它的 x^2 係數變成 1 了：
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

將 $+\frac{c}{a}$ 移項到等號右邊：
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$x^2 + \frac{b}{a}x$ 想要配成完全平方，我們要集滿「 $\square^2 + 2 \cdot \square \cdot \Delta + \Delta^2$ 」

換成 $(\square + \Delta)^2$ 。

把 x^2 當成 \square^2 ，就是把 x 當成 \square ；那 $\frac{b}{a}x$ 就當成是 $2\square \cdot \Delta$ ，

想一下 $\frac{b}{a}x = 2 \cdot x \cdot \underline{\quad ? \quad}$ ，問號會是 $\frac{b}{a}$ 的一半： $\frac{b}{2a}$ 。

$\frac{b}{a}x = 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}$ ，也就是把 $\frac{b}{2a}$ 當成 Δ ；所以最後再加個 $(\frac{b}{2a})^2$ 就集滿

「 $\square^2 + 2 \cdot \square \cdot \Delta + \Delta^2$ 」了。

而等號左邊要加上 $(\frac{b}{2a})^2$ ，等號右邊當然也要加上 $(\frac{b}{2a})^2$ ，才能維持等式成立：

$$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$$

等號左邊： $x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + (\frac{b}{2a})^2 = (x + \frac{b}{2a})^2$

$$\boxed{\square^2 + 2 \cdot \square \cdot \Delta + \Delta^2 = (\square + \Delta)^2}$$

等號右邊： $-\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
 $= -\frac{c \cdot 4a}{a \cdot 4a} + \frac{b^2}{4a^2}$
 $= \frac{-4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$
 $= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

整個式子： $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

將 $(x + \frac{b}{2a})$ 看成一整個物件，利用平方根的概念：

$$\boxed{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\boxed{\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

將 $+\frac{b}{2a}$ 移項： $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

既然知道這個「 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 」公式，那麼我們就可以利用公式

解來解一些一元二次方程式了！

例題一：利用公式解，求出一元二次方程式 $x^2 + 6x + 2 = 0$ 的解。

解：一元二次方程式 $x^2 + 6x + 2 = 0$ ，
已經是一般式「 $ax^2 + bx + c = 0$ 」的樣子了，

所以可以知道 $a = 1$ 、 $b = 6$ 、 $c = 2$ 。

將 $a = 1$ 、 $b = 6$ 、 $c = 2$ 代入 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

一次全部代入的話，計算量太大了，我們可以分批算，先算根

號裡面的東西： $b^2 - 4ac$ 。

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times 2 = 36 - 8 = 28$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{2 \times 1} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -3 \pm \sqrt{7}$$

$x^2 + 6x + 2 = 0$ 的解是 $-3 + \sqrt{7}$ 或 $-3 - \sqrt{7}$

例題二：利用公式解，求出一元二次方程式 $x^2 - 5x = 2$ 的解。

解：我們先將 $x^2 - 5x = 2$ 換成一般式「 $ax^2 + bx + c = 0$ 」的樣子，

將等號右邊的 2 移項： $x^2 - 5x - 2 = 0$ 。

x^2 的係數是 1； x 項的係數是 -5；常數項是 -2。

所以可以知道 $a = 1$ 、 $b = -5$ 、 $c = -2$ 。

將 $a = 1$ 、 $b = -5$ 、 $c = -2$ 代入 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

先算根號裡面的東西： $b^2 - 4ac$ 。

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 25 + 8 = 33$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{33}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$x^2 - 5x = 2$ 的解是 $\frac{5 + \sqrt{33}}{2}$ 或 $\frac{5 - \sqrt{33}}{2}$

例題三：利用公式解，求出一元二次方程式 $3x^2 + x - 1 = 0$ 的解。

解： x^2 的係數是 3； x 項的係數是 1；常數項是 -1。

所以可以知道 $a = 3$ 、 $b = 1$ 、 $c = -1$ 。

將 $a = 3$ 、 $b = 1$ 、 $c = -1$ 代入 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

先算根號裡面的東西： $b^2 - 4ac$ 。

$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2 \times 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$3x^2 + x - 1 = 0 \text{ 的解是 } \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \text{ 或 } \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}$$

重點提問

1. 根據上面的課文，請用自己的話解釋一下什麼是一元二次方程式的「公式解」。並舉出一個例子說明。

2. 整理一下，解一元二次方程式有三種方法，是哪三種？

• 隨堂練習：

1. 解一元二次方程式 $x^2 + 8x - 7 = 0$

2. 解一元二次方程式 $x^2 - 2x = 3$

3. 解一元二次方程式 $x^2 + x - 1 = 0$

4. 解一元二次方程式 $x^2 - 3x = 10$

5. 解一元二次方程式 $2x^2 + 6x + 1 = 0$

6. 解一元二次方程式 $3x^2 - 2x = 1$

還是不太懂公式怎麼來，
請看下面影片(1)



[https://www.youtube.com/
watch?v=SIRrDDLsPpU](https://www.youtube.com/watch?v=SIRrDDLsPpU)

還想多看幾題範例，
請看下面影片(2)



[https://www.youtube.com/
watch?v=ozLj1bBfCY8](https://www.youtube.com/watch?v=ozLj1bBfCY8)