

目錄

單元一：一元二次方程式及解的意義	2
課文：一元二次方程式及解的意義	2
單元二：因式分解法解一元二次方程式	10
課文 A：利用提公因式法因式分解解一元二次方程式	10
課文 B：利用十字交乘法因式分解解一元二次方程式	16
課文 C：利用乘法公式因式分解解一元二次方程式	24
單元三：利用配方法解一元二次方程式	30
課文 A：利用平方根的概念解一元二次方程式	30
課文 B：配成完全平方式	36
課文 C：利用配方法解 x^2 係數為 1 的一元二次方程式	44
課文 D：利用配方法解 x^2 係數不為 1 的一元二次方程式	51
單元四：利用公式解一元二次方程式	55
課文 A：一元二次方程式的一般式	55
課文 B：利用公式解一元二次方程式	58
課文 C：一元二次方程式的判別式	65
單元五：一元二次方程式的應用問題	71
課文 A：一元二次方程式的應用問題	71

單元一：一元二次方程式及解的意義

課文：一元二次方程式及解的意義

我們在七上的時候就曾經學過「一元一次方程式」，指的是含有一個未知數(一元)，最高次方是一次方(一次)的等式(方程式)。

而我們這單元所要討論的是「 x 的一元二次方程式」，什麼是一元二次方程式呢？

例如 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 、 $x^2 = 4$ ，它們都只有一個未知數 x (一元)，而且最高次方都是二次方(二次)的等式(方程式)，就叫「一元二次方程式」。

我們舉幾個例子來判斷看看！

例題一：判斷下列各式是不是一元二次方程式：

(1) $2x + 3 = 5$

(2) $x^2 + 3x - 5$

(3) $x^2 = 5$

(4) $(x - 3)(x - 4) = 0$

◎解題思維：

一元二次方程式包含了三個條件：「一元」是指只有一個未知數；「二次」是指那個未知數最高次方是二次方；「方程式」代表它是一個等式。接下來就檢驗有沒有同時符合這三個條件。

解：

$$(1) 2x + 3 = 5$$

這個式子只有一個未知數，但是它最高次方是一次方，而且明顯是一個等式。「一個未知數、一次方、等式」，所以它應該是「一元一次方程式」。

$$(2) x^2 + 3x - 5$$

這個式子的確只有一個未知數，它最高次方也是二次方，但是它沒有等號，所以不是一個等式，這樣的式子就是一個「一元二次多項式」。

$$(3) x^2 = 5$$

這個式子有一個未知數，最高次方也是二次方，而且明顯是一個等式。這個式子完全符合「一個未知數、二次方、等式」，所以它就是一個「一元二次方程式」。

$$(4) (x - 3)(x - 4) = 0$$

這個式子看起來感覺不像一元二次方程式，但是這是還沒有乘開化簡的樣子，所以我們將它乘開化簡開來看看。

$$(x - 3)(x - 4) = 0$$

乘開後是 $x^2 - 3x - 4x + 12 = 0$

再整理化簡 $x^2 - 7x + 12 = 0$

發現 $(x - 3)(x - 4) = 0$ 乘開化簡後的結果是

$x^2 - 7x + 12 = 0$ ，它只有一個未知數，最高次方也是二次方，而且明顯是一個等式。這個式子完全符合「一個未知數、二次方、等式」，所以它就是一個「一元二次方程式」。

認識完一元二次方程式後，接下來介紹一元二次方程式的解。

先回想一下，我們以前曾經在國七時學過一元一次方程式的解。

有一個一元一次方程式 $x - 2 = 3$ ，我們知道這個方程式中的 x 是一個未知數，而當我們將 $x = 5$ 代入 $x - 2 = 3$ 這個方程式時，會發現等式成立，那麼我們就說「5 是方程式 $x - 2 = 3$ 的解」。

同樣的，一元二次方程式的解，意思就是將某個數字代入一元二次方程式中，如果等式成立了，那麼我們就會說那個數字是一元二次方程式的解。

舉一個例子來說，一元二次方程式 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的解是什麼呢？

我們嘗試將 $x = 1$ 、 $x = 2$ 、 $x = 3$ 、 $x = 4$ 代入方程式，看看有什麼結果？

代入 $x=1$

$$x^2 - 7x + 12 = 1^2 - 7 \times 1 + 12 = 1 - 7 + 12 = 6 \neq 0$$

代入 $x=2$

$$x^2 - 7x + 12 = 2^2 - 7 \times 2 + 12 = 4 - 14 + 12 = 2 \neq 0$$

代入 $x=3$

$$x^2 - 7x + 12 = 3^2 - 7 \times 3 + 12 = 9 - 21 + 12 = 0 = 0$$

代入 $x=4$

$$x^2 - 7x + 12 = 4^2 - 7 \times 4 + 12 = 16 - 28 + 12 = 0 = 0$$

我們將 $x=1$ 、 $x=2$ 代入時，等式不成立，所以 $x=1$ 、 $x=2$ 都不是方程式 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的「解」。

而當我們將 $x=3$ 、 $x=4$ 代入時，等式成立，所以 $x=3$ 、 $x=4$ 都是方程式 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的「解」，也可以稱作「根」。

我們再看一題！

例題二：判斷 -1 是否為一元二次方程式 $x^2 - 3x = -5x + 3$ 的解？

解：我們就是要將 $x = -1$ 代入 $x^2 - 3x = -5x + 3$ 這個方程式裡

面，看看等式會不會成立！

$$\text{等號左邊：} x^2 - 3x = (-1)^2 - 3 \times (-1) = 1 + 3 = 4$$

$$\text{等號右邊：} -5x + 3 = (-5) \times (-1) + 3 = 5 + 3 = 8$$

$4 \neq 8$ ，左邊 \neq 右邊，等式不成立，所以 -1 不是 $x^2 - 3x = -5x + 3$

☆心得筆記

重點提問

1. 上面的課文中提到，如果直接按照字面上的意思來翻譯，「一元二次方程式」指的是什麼？並請你舉一個一元二次方程式的例子。
2. 依據上面的課文，請問所謂一元二次方程式的「解」，指的是什麼？並請你舉一個例子說明一下。

• 隨堂練習：

1. 判斷下列各式是哪種式子，填入格子內。

(A)一元一次多項式 (B)一元一次方程式 (C)二元一次式

(D)二元一次方程式 (E)一元二次多項式 (F)一元二次方程式

(1) $3x - 8$ 是 _____ 。

(2) $x^2 + 5x + 6$ 是 _____ 。

(3) $x + 2y = 4$ 是 _____ 。

(4) $3x - 6 = 9$ 是 _____ 。

(5) $3x + 2y$ 是 _____ 。

(6) $3x^2 - 8 = 5x + 3$ 是 _____ 。

2. -2 、 -1 、 0 、 1 、 2 這些數中，

哪些是一元二次方程式 $x^2 - x - 2 = 0$ 的解？

3. $x = 1$ 是下列哪些一元二次方程式的根？（複選）

(A) $x^2 - 1 = 0$

(B) $x^2 - 2x + 1 = 0$

(C) $x^2 + 2x + 1 = 0$

(D) $x^2 - 5x - 6 = 0$

(E) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

(F) $2x^2 - 5 = 2x - 7$

還是不太懂，
請看下面影片(1)



<https://youtu.be/V4KmsLaUus8>

如果例題一、二還是不太懂，
請看下面影片(2)



https://www.youtube.com/watch?v=LrT_E-q0kzM