

## 單元二：因式分解法解一元二次方程式

### 課文 A：利用提公因式法因式分解解一元二次方程式

---

認識完一元二次方程式與其解的意義後，接下來就要解方程式了！

首先就是要介紹解一元二次方程式的第一個方法——因式分解法，在說明利用因式分解法解方程式之前，先來看一個會用到的觀念！「 $A \times B = 0$ 」這個式子代表著有兩個數，一個是 A、一個是 B，這兩個東西相乘等於 0。那麼這個式子什麼情況下會成立呢？仔細想一下，就可以知道這兩個數當中至少要有一個是 0，換句話說，就是「 $A = 0$  或  $B = 0$ 」。

所以如果我們知道「 $A \times B = 0$ 」，那麼就可以推論「 $A = 0$  或  $B = 0$ 」。

有這個觀念後，我們就要利用這個觀念解一元二次方程式，

例如  $(3x + 1) \times (x + 2) = 0$ ：代表「不是  $(3x + 1) = 0$  就是  $(x + 2) = 0$ 」，

所以就個別解出「 $(3x + 1) = 0$ 」及「 $(x + 2) = 0$ 」就可以了！

也就是說，將一元二次方程式因式分解成

$(ax + b)(cx + d) = 0$  ( $A \times B = 0$ )，就能求出方程式的解。

接下來我們介紹三種不同形式的一元二次方程式，看看要如何利用上述方法解出  $x$ 。

例題一：解一元二次方程式  $x^2 - 2x = 0$

◎解題思維：

觀察一下， $x^2 - 2x = 0$  是一個一元二次方程式，等號右邊是 0，所以如果把等號左邊  $x^2 - 2x$  拆成兩個東西相乘，那麼式子就會符合「 $A \times B = 0$ 」了！把等號左邊  $x^2 - 2x$  拆成兩個東西相乘，就是我們之前學的因式分解！

$$\begin{array}{l} x^2 - 2x \\ \swarrow \searrow \\ x(x-2) = 0 \\ \boxed{A \times B = 0} \end{array}$$

可以同時提出公因式  $x$  !

所以  $x = 0$  或  $x - 2 = 0$

$$\boxed{A = 0 \text{ 或 } B = 0}$$

移項整理得到  $x = 0$  或  $2$

解：  $x^2 - 2x = 0$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } 2$$

$x^2 - 2x = 0$  的解是「 $x = 0$  或  $2$ 」  
試著  $x = 0$ 、 $x = 2$  代回去驗證看看：

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 0^2 - 2 \times 0 \\ &= 0 - 0 = 0 \quad \text{等式成立} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 2^2 - 2 \times 2 \\ &= 4 - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0 \quad \text{等式成立} \end{aligned}$$

例題二：解一元二次方程式  $3x^2 = -4x$

◎解題思維：

這個方程式  $3x^2 = -4x$  等號右邊不是 0，那麼怎麼把等號右邊變成 0 呢？

很簡單，就是將等號右邊  $-4x$  移項到等號左邊： $3x^2 + 4x = 0$

接下來就可以繼續做下去了！

$$3x^2 + 4x = 0$$

↓ ↘ 可以同時提出公因式  $x$  !

$$x(3x + 4) = 0$$
$$\boxed{A \times B = 0}$$

所以  $x = 0$  或  $3x + 4 = 0$

$$\boxed{A = 0 \text{ 或 } B = 0}$$

移項整理得到  $x = 0$  或  $-\frac{4}{3}$

$$3x + 4 = 0$$
$$3x = -4 \quad \boxed{+4 \text{ 移項過去變 } -4}$$
$$x = (-4) \div 3 \quad \boxed{\times 3 \text{ 移項過去 } \div 3}$$
$$= (-4) \times \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\boxed{\text{解}} : 3x^2 + 4x = 0$$

$$x(3x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } 3x + 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } -\frac{4}{3}$$

例題三：解一元二次方程式  $(x + 3)(x + 2) = (x + 3)(2x - 5)$

◎解題思維：

等號右邊不是 0，等號右邊  $(x + 3)(2x - 5)$  移項到等號左邊：

$$(x + 3)(x + 2) - (x + 3)(2x - 5) = 0$$

可以同時提出公因式  $(x + 3)$ ！

$$(x + 3)[(x + 2) - (2x - 5)] = 0$$

$$(x + 3)(x + 2 - 2x + 5) = 0$$

$$(x + 3)(-x + 7) = 0$$

$$\boxed{A \times B = 0}$$

所以  $x + 3 = 0$  或  $-x + 7 = 0$

$$\boxed{A = 0 \text{ 或 } B = 0}$$

移項整理得到  $x = -3$  或  $7$

解：

$$(x + 3)(x + 2) = (x + 3)(2x - 5)$$

$$(x + 3)(x + 2) - (x + 3)(2x - 5) = 0$$

$$(x + 3)[(x + 2) - (2x - 5)] = 0$$

$$(x + 3)(x + 2 - 2x + 5) = 0$$

$$(x + 3)(-x + 7) = 0$$

$$x = -3 \text{ 或 } 7$$

我們在利用因式分解法解一元二次方程式時，想法就是要將整個式子變成

「 $A \times B = 0$ 」的樣子，等號右邊要讓它為 0，而等號左邊要讓它變成兩個東

西相乘，也就是之前學過的多項式因式分解的方法；接下來就可以推得

「 $A = 0$  或  $B = 0$ 」，把解求出來了！

## 重點提問

1. 根據上面的課文，利用因式分解法解一元二次方程式需要將式子整理成什麼樣子？整理之後就可以推得什麼？
2. 利用提公因式因式分解來解一元二次方程式  $3x^2 = 6x$
3. 想想看，如果一元二次方程式  $x(x - 1) = 1$ ，能不能推論出「 $x = 1$ 或  $x - 1 = 1$ 」然後解出  $x$  呢？

• 隨堂練習：

1. 解一元二次方程式  $3x^2 - 5x = 0$

2. 解一元二次方程式  $x^2 - \frac{1}{5}x = 0$

3. 解一元二次方程式  $x^2 = 6x$

4. 解一元二次方程式  $(x + 5)(x + 1) = -(x + 5)(x - 5)$

例題三還不太懂，  
請看下面影片(1)



<https://youtu.be/UBY3Uv-VvMA>

還想多看幾題範例，  
請看下面影片(2)



[https://www.youtube.com/watch?v=1tZpdP\\_98AI](https://www.youtube.com/watch?v=1tZpdP_98AI)

## 課文 B：利用十字交乘法因式分解一元二次方程式

---

接下來繼續利用因式分解法解一元二次方程式，

我們這學期剛學過的因式分解有三種方法：提公因式、乘法公式和十字交乘法。

課文 A 是利用提公因式來因式分解，如果沒有公因式可以提出來的話，就可以試試十字交乘法來進行因式分解。

來看一下五個利用十字交乘法解一元二次方程式的例題！

例題一：解一元二次方程式  $x^2 - 2x - 3 = 0$

◎解題思維：

觀察一下  $x^2 - 2x - 3 = 0$  這個一元二次方程式，發現等號右邊是 0，如果將等號左邊  $x^2 - 2x - 3$  因式分解成兩個東西相乘，那麼整個式子就會符合「 $A \times B = 0$ 」了！

$x^2 - 2x - 3$  沒有公因式可以提出去，可以試試十字交乘法進行因式分解。

十字交乘法有一個口訣：「拆前面、拆後面、造中間」， $x^2 - 2x - 3$

前面  $x^2$  可以拆成  $x$  乘  $x$ ；後面  $-3$  可以拆成  $+1$  乘  $-3$ ，交叉相乘：

$$\begin{array}{r} x \quad \quad +1 \\ \quad \quad \quad \times \\ x \quad \quad -3 \\ \hline +x - 3x = -2x \end{array}$$

等號左邊  $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

整個式子就是  $(x + 1)(x - 3) = 0$

$$\boxed{A \times B = 0}$$

所以  $x + 1 = 0$  或  $x - 3 = 0$

$$\boxed{A = 0 \text{ 或 } B = 0}$$

移項整理得到  $x = -1$  或  $3$

**解：**

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad +1 \\ \quad \quad \quad \times \\ x \quad \quad -3 \\ \hline +x - 3x = -2x \end{array}$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ 或 } x - 3 = 0$$

$$x = -1 \text{ 或 } 3$$



例題二：解一元二次方程式  $3x^2 + 16x + 5 = 0$

◎解題思維：

把  $3x^2 + 16x + 5$ ，前面  $3x^2$  可以拆成  $3x$  乘  $x$ ；

後面  $+5$  可以拆成  $+1$  乘  $+5$ ，交叉相乘：

$$\begin{array}{r} 3x \quad +1 \\ \quad \quad \times \\ x \quad \quad +5 \\ \hline +x + 15x = +16x \end{array}$$

等號左邊  $3x^2 + 16x + 5 = (3x + 1)(x + 5)$

整個式子就是  $(3x + 1)(x + 5) = 0$

$\boxed{A \times B = 0}$

所以  $3x + 1 = 0$  或  $x + 5 = 0$

$\boxed{A = 0 \text{ 或 } B = 0}$

移項整理得到

$$x = -\frac{1}{3} \text{ 或 } -5$$

$$3x + 1 = 0$$

$$3x = -1$$

$$x = (-1) \div 3$$

$$= (-1) \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$\boxed{+1 \text{ 移項過去變 } -1}$

$\boxed{\times 3 \text{ 移項過去變 } \div 3}$

**解：**  $3x^2 + 16x + 5 = 0$

$$\begin{array}{r} 3x \quad +1 \\ \quad \quad \times \\ x \quad \quad +5 \\ \hline +x + 15x = +16x \end{array}$$

$$(3x + 1)(x + 5) = 0$$

$$3x + 1 = 0 \text{ 或 } x + 5 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ 或 } -5$$

例題三：解一元二次方程式  $-3x^2 + 14x + 5 = 0$

◎解題思維：

為了好分解，我們可以先將等號兩邊同乘 $-1$ ，這樣方程式就會變為

$3x^2 - 14x - 5 = 0$ ，前面 $3x^2$ 可以拆成  $3x$  乘  $x$ ；

後面 $-5$ 可以拆成  $+1$  乘  $-5$ ，交叉相乘：

$$\begin{array}{r} 3x \quad + 1 \\ x \quad - 5 \\ \hline x - 15x = -14x \end{array}$$

等號左邊  $3x^2 - 14x - 5 = (3x + 1)(x - 5)$

整個式子就是  $(3x + 1)(x - 5) = 0$   
 $\boxed{A \times B = 0}$

所以  $3x + 1 = 0$  或  $x - 5 = 0$   
 $\boxed{A = 0 \text{ 或 } B = 0}$

移項整理得到  $x = -\frac{1}{3}$  或  $5$

**解**：  $-3x^2 + 14x + 5 = 0$  等號兩邊同乘 $-1 \Rightarrow 3x^2 - 14x - 5 = 0$

$$\begin{array}{r} 3x \quad + 1 \\ x \quad - 5 \\ \hline x - 15x = -14x \end{array}$$

$(3x + 1)(x - 5) = 0$

$3x + 1 = 0$  或  $x - 5 = 0$

$x = -\frac{1}{3}$  或  $5$

例題四：解一元二次方程式  $4x^2 + 12x + 9 = 0$

◎解題思維：

把  $4x^2 + 12x + 9$ ，前面  $4x^2$  可以拆成  $2x$  乘  $2x$ ；

後面  $+9$  可以拆成  $+3$  乘  $+3$ ，交叉相乘：

$$\begin{array}{r} 2x \quad + 3 \\ \quad \quad \times \\ 2x \quad + 3 \\ \hline 6x + 6x = +12x \end{array}$$

等號左邊  $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)(2x + 3)$

整個式子就是  $(2x + 3)(2x + 3) = 0$

$$\boxed{A \times B = 0}$$

所以  $2x + 3 = 0$  或  $2x + 3 = 0$

$$\boxed{A = 0 \text{ 或 } B = 0}$$

移項整理得到  $x = -\frac{3}{2}$  或  $-\frac{3}{2}$

$$2x + 3 = 0$$

$$2x = -3$$

$$x = (-3) \div 2$$

$$= (-3) \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

+3 移項過去變 -3

× 2 移項過去變 ÷ 2

同學們一定會覺得很奇怪，這兩個解不是一樣的嗎？

沒錯！這兩個解都一樣，在這種「兩個解都一樣」的特別情況，我們

叫做「重根」！

所以我們寫出來的解也可以寫成  $x = -\frac{3}{2}$  (重根)！

例題五：解一元二次方程式  $(2x + 5)(x + 4) = 14$

◎解題思維：

這個式子的等號左邊看起來像是已經因式分解好了，但是仔細看等號右邊不是 0，所以必須先將等號右邊的 14 移項過去等號左邊。

$$(2x + 5)(x + 4) - 14 = 0$$

這樣子等號左邊  $(2x + 5)(x + 4) - 14$  就必須重新整理了，

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{↙} \quad \text{↘} \\ (2x + 5)(x + 4) - 14 = 0 \\ \text{↖} \quad \text{↗} \end{array} \\ 2x^2 + 8x + 5x + 20 - 14 = 0 \\ 2x^2 + 13x + 6 = 0 \end{array}$$

這很明顯可以使用十字交乘法：

前面  $2x^2$  可以拆成  $2x$  乘  $x$ ；後面  $+6$  可以拆成  $+1$  乘  $+6$ ，

交叉相乘：

$$\begin{array}{r} 2x \quad +1 \\ x \quad +6 \\ \hline x + 12x = +13x \end{array}$$

所以  $(2x + 1)(x + 6) = 0$

那麼  $(2x + 1) = 0$  或  $(x + 6) = 0$

移項整理得到  $x = -\frac{1}{2}$  或  $-6$

$$\begin{array}{l} 2x + 1 = 0 \\ 2x = -1 \quad \boxed{+1 \text{ 移項過去變 } -1} \\ x = (-1) \div 2 \quad \boxed{\times 2 \text{ 移項過去變 } \div 2} \\ = (-1) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{array}$$

## 重點提問

1. 利用十字交乘法因式分解解一元二次方程式  $x^2 + 7x = -12$

2. 利用十字交乘法因式分解解一元二次方程式  $(x + 1)(2x - 1) = 2$

• 隨堂練習：

1. 解一元二次方程式  $x^2 - 7x + 10 = 0$

2. 解一元二次方程式  $3x^2 - 14x + 15 = 0$

3. 解一元二次方程式  $-3x^2 + 17x - 10 = 0$

4. 解一元二次方程式  $9x^2 - 12x + 4 = 0$

5. 解一元二次方程式  $(2x - 3)(x + 2) = 4$

如果例題一、三、四  
還是不太懂，  
請看下面影片(1)



<https://www.youtube.com/wa>

如果例題五還是不太懂，  
請看下面影片(2)



<https://www.youtube.com/watch?v=9mncwQDUJgw>