

## 課文 C：利用乘法公式因式分解一元二次方程式

---

因式分解還有一種方式，就是利用乘法公式來因式分解。

複習一下，乘法公式有三種：

和的平方公式： $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ 、

差的平方公式： $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ 、

平方差公式： $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 。

直接來試試看練習題！

例題一：解一元二次方程式  $x^2 - 6x + 9 = 0$

◎解題思維：

這個  $x^2 - 6x + 9 = 0$  一元二次方程式的等號右邊為 0，觀察等號左

邊  $x^2 - 6x + 9$ ，其中一次項係數  $6 = 2 \times 3$ ；常數項  $9 = 3^2$ ，

因此  $x^2 - 6x + 9$  可以利用公式  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$  因式分解。

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x - 3)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

整個式子就是  $(x - 3)^2 = 0$

這個  $(x - 3)$  的平方等於 0，其實就是  $(x - 3)$  會等於 0，所以  $x$  就會等於 3。

但是這個一元二次方程式  $x^2 - 6x + 9 = 0$  的解只有一個嗎？

仔細想一下， $x^2 - 6x + 9 = 0$  這個一元二次方程式可以化成

$$(x - 3)^2 = 0, \text{ 而等號左邊 } (x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3);$$

$$(x - 3)(x - 3) = 0, \text{ 那麼 } (x - 3) = 0 \text{ 或 } (x - 3) = 0。$$

更準確地來說，解出來應該是兩個都一樣的，也就是「重根」。

因此解出來的解可以寫成  $x = 3$  (重根)！

解 1：

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$(x - 3) = 0$$

$$x = 3 \text{ (重根)}$$

解 2：其實也可以用十字交乘法解

$$\begin{array}{r} x \quad \quad -3 \\ \times \\ x \quad \quad -3 \\ \hline -3x - 3x = -6x \end{array}$$

$$(x - 3)(x - 3) = 0$$

$$(x - 3) = 0$$

$$x = 3 \text{ (重根)}$$

※小秘密：只要能化成  $(a + b)^2$  或  $(a - b)^2$  形式的一元二次方程式，都

可以用十字交乘法解喔！

例題二：想想看下列一元二次方程式可以利用哪一個乘法公式來解？

(A)  $4x^2 + 12x + 9 = 0$     (B)  $4x^2 = 9$     (C)  $(3x - 2)^2 = (2x - 3)^2$

(A) 等號左邊  $4x^2 + 12x + 9$ ：4 是 2 的平方，所以  $4x^2 = (2x)^2$ ；       $12x$

可以拆成 2 乘  $2x$  乘 3，也就是  $12x = 2 \cdot 2x \cdot 3$ ；而  $9 = 3^2$ 。

如下面的式子：

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

所以整個式子就是  $(2x + 3)^2 = 0$ ， $x = -\frac{3}{2}$  (重根)

利用和的平方公式： $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$  就可以解出  $x$  了。

(B) 看一下  $4x^2 = 9$  這一個一元二次方程式，發現它等號的右邊不是 0，那麼第一步我們當然要將等號右邊的東西移項到等號左邊去。

等號右邊的 9 移項到等號左邊去，整個式子變成  $4x^2 - 9 = 0$  了！

等號左邊  $4x^2 - 9$ ：4 是 2 的平方，所以  $4x^2 = (2x)^2$ ；而  $9 = 3^2$ 。

如下面的式子：

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x + 3)(2x - 3)$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

所以整個式子就是  $(2x + 3)(2x - 3) = 0$

$$A \times B = 0$$

可求出  $x = -\frac{3}{2}$  或  $\frac{3}{2}$

利用平方差公式  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  就可以把  $x$  解出來了。

(C)看這個一元二次方程式  $(3x - 2)^2 = (2x - 3)^2$ ，發現等號右邊不為 0，

所以要移項到左邊變成： $(3x - 2)^2 - (2x - 3)^2 = 0$ 。

等號左邊很明顯就是可以利用平方差公式： $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$\begin{array}{c} (3x - 2)^2 - (2x - 3)^2 = 0 \\ \boxed{a^2 - b^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} [(3x - 2) + (2x - 3)][(3x - 2) - (2x - 3)] = 0 \\ \boxed{(a + b)(a - b)} \end{array}$$

$$(3x - 2 + 2x - 3)(3x - 2 - 2x + 3) = 0$$

$$\begin{array}{c} (5x - 5)(x + 1) = 0 \\ \boxed{A \times B = 0} \end{array}$$

可求出  $x = 1$  或  $-1$

### 重點提問

1. 根據上面的課文，請用自己的話解釋「重根」的意思，並請你舉一個例子說明一下。

2. 試著利用乘法公式解下列一元二次方程式，並將解該題與所用到的乘法公式連起來。

1.  $9x^2 - 49 = 0$  •

• 和的平方公式：

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

2.  $x^2 - 16x + 64 = 0$  •

• 差的平方公式：

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

3.  $25x^2 + 20x + 4 = 0$  •

• 平方差公式：

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

• 隨堂練習：

1. 解一元二次方程式  $x^2 + 8x + 16 = 0$

2. 解一元二次方程式  $9x^2 - 24x + 16 = 0$

3. 解一元二次方程式  $9x^2 = 4$

4. 解一元二次方程式  $(x - 2)^2 = (2x + 3)^2$

如果例題三還是不太懂，  
請看下面影片



<https://www.youtube.com/watch?v=1qmPo436-Us>

### 單元三：利用配方法解一元二次方程式

#### 課文 A：利用平方根的概念解一元二次方程式

上一單元我們利用因式分解法解一元二次方程式，但是所有的一元二次方程式都可以利用因式分解法來解嗎？

試試看解一元二次方程式  $x^2 + 6x + 2 = 0$ 。

要將左邊  $x^2 + 6x + 2$  因式分解，讓整個成為「 $A \times B = 0$ 」的形式：

$x^2$ 、 $6x$ 、 $+2$  各項沒有共同的公因式，所以不能提公因式；

如果我們嘗試用十字交乘法，「拆前面、拆後面、造中間」，前面  $x^2$  拆

成  $x \cdot x$ ，後面  $+2$  拆成  $(+2) \times (+1)$ ，看看造中間，也發現沒辦法成功

造中間，所以也沒辦法利用十字交乘法。

$$\begin{array}{r} x \quad +1 \\ \quad \times \\ x \quad +2 \\ \hline +x + 2x = 3x \end{array}$$

※因為無法利用十字交乘法，所以也不能用和的平方公式來解

這種沒辦法利用因式分解法來解的一元二次方程式怎麼辦？

接下來要介紹新的方法！

我們先來看一些比較簡單的例子！

例題一：解下列一元二次方程式：

$$(1) x^2 = 4$$

$$(2) x^2 = 7$$

**解**：這兩題都是很單純一元二次方程式的題目，就其實是求平方根。

(1)  $x^2 = 4$ ，指的意思是  $x$  是 4 的平方根。

4 的平方根為 2 或 -2，所以  $x = 2$  或  $-2$ 。

(2)  $x^2 = 7$ ，指的意思是  $x$  是 7 的平方根。

7 的平方根為  $\sqrt{7}$  或  $-\sqrt{7}$ ，所以  $x = \sqrt{7}$  或  $-\sqrt{7}$ 。

再來看稍微複雜一點的題目！



例題二：解下列一元二次方程式：

$$(1) (x - 1)^2 = 4$$

$$(2) (x + 3)^2 = 7$$

解：

(1) 這題我們可以利用因式分解的方法來解，也可以用不同方法來試

試看！

$(x - 1)^2 = 4$ ，我們先將  $(x - 1)$  看成一整個物件。

一整個物件的平方等於 4：

$(x - 1)^2 = 4$ ，所以  $(x - 1) = 2$  或  $-2$ 。

$$x - 1 = 2 \quad \text{或} \quad x - 1 = -2$$

$$x = 2 + 1 \quad \text{或} \quad x = -2 + 1$$

$$x = 3 \quad \text{或} \quad -1$$

(2)  $(x + 3)^2 = 7$ ，所以  $(x + 3) = \sqrt{7}$  或  $-\sqrt{7}$ 。

$$x + 3 = \sqrt{7} \quad \text{或} \quad x + 3 = -\sqrt{7}$$

$$x = -3 + \sqrt{7} \quad \text{或} \quad x = -3 - \sqrt{7}$$

$$x = -3 + \sqrt{7} \quad \text{或} \quad -3 - \sqrt{7}$$

在例題一、例題二中，我們都用到了平方根的觀念來解一元二次方程式，而這個平方根的觀念就是配方法很重要的想法。

我們要利用平方根的觀念來解一元二次方程式，就需要將每一個一元二次式變成完全平方式的樣子，像是  $(x - 1)^2$ 、 $(x + 3)^2$ ，於是整個式子就變成「 $(x + \square)^2 = \bigcirc$ 」形式，像是  $(x - 1)^2 = 4$ 、 $(x + 3)^2 = 7$ ，接下來就可以利用平方根的觀念解出  $x$  來了！

而變成完全平方式的過程，這個方法就是所謂的「配方法」（配成完全平方式的方法）。



• 隨堂練習：

1. 解一元二次方程式  $x^2 = 8$

2. 解一元二次方程式  $x^2 = 17$

3. 解一元二次方程式  $(x + 2)^2 = 8$

4. 解一元二次方程式  $(x - 5)^2 = 17$

還想多看幾題範例，  
請看下面影片



[https://www.youtube.com/  
watch?v=-t0PTmieSB8](https://www.youtube.com/watch?v=-t0PTmieSB8)

## 課文 B：配成完全平方式

---

「配方法」就是要將式子配成完全平方式的方法，

接下來我們就要先看如何配成完全平方式。

在了解如何配成完全平方式之前，

先複習一下乘法公式，主要會用到兩種公式：

1. 和的平方公式： $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

這個公式表示的意思是說  $(a + b)^2$  展開就會變成  $a^2 + 2ab + b^2$  ；

反過來說就是只要集滿「 $a^2 + 2ab + b^2$ 」，就可以換成  $(a + b)^2$  ，

而這就是一種完全平方式了！

2. 差的平方公式： $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

這個公式表示的意思是說  $(a - b)^2$  展開就會變成  $a^2 - 2ab + b^2$  ；

反過來說就是只要集滿「 $a^2 - 2ab + b^2$ 」，就可以換成  $(a - b)^2$  ，

而這就是一種完全平方式了！

我們就是利用乘法公式的概念去配成完全平方式。

例題一：在空格中填入適當的數，並將下列各式變成完全平方式。

(1)  $x^2 + 6x + \square$

(2)  $x^2 - 10x + \square$

解：

(1) 我們需要利用乘法公式來配成完全平方式，從題目來觀察，

「 $x^2 + 6x + \square$ 」這個式子結構跟「 $a^2 + 2ab + b^2$ 」比較像，  
所以我們只要集滿「 $a^2 + 2ab + b^2$ 」就可以換成  $(a + b)^2$ 。

$$x^2 + 6x + \square$$

這裡的  $x^2$  當成  $a^2$ ，就是把  $x$  當成  $a$ ；那  $6x$  就當成是  $2ab$ ，

想一下  $6x = 2 \cdot x \cdot \underline{\quad ? \quad}$ ，問號會是多少？

$6x = 2 \cdot x \cdot 3$ ，也就是說把 3 當成  $b$ ；

所以最後再加個  $b^2$  就集滿「 $a^2 + 2ab + b^2$ 」了。

如下面的式子：

$$x^2 + 6x + \square = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + \square$$
$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2}$$

所以  $\square$  只要填入  $3^2$ ，就有集滿「 $a^2 + 2ab + b^2$ 」，可以變成  
 $(a + b)^2$ 。

$$x^2 + 6x + \boxed{3^2} = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2 \text{ 變成完全平方式了！}$$
$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2} = (a + b)^2$$

(2) 「 $x^2 - 10x + \square$ 」這個式子結構跟「 $a^2 - 2ab + b^2$ 」比較像，

所以我們只要集滿「 $a^2 - 2ab + b^2$ 」就可以換成  $(a - b)^2$ 。

$$x^2 - 10x + \square$$

這裡的  $x^2$  當成  $a^2$ ，就是把  $x$  當成  $a$ ；那  $10x$  就是  $2ab$ ，

想一下  $10x = 2 \cdot x \cdot \underline{\quad ? \quad}$ ，問號會是多少？

$10x = 2 \cdot x \cdot 5$ ，也就是可以把 5 當成  $b$ ；

所以最後再加個  $b^2$  就集滿「 $a^2 - 2ab + b^2$ 」了。

如下面的式子：

$$x^2 - 10x + \square = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + \square$$
$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2}$$

所以  $\square$  只要填入  $5^2$ ，就有集滿「 $a^2 - 2ab + b^2$ 」，可以變成

$(a - b)^2$ 。

$x^2 - 10x + \boxed{5^2} = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x - 5)^2$  變成完全平方了！

$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$$

例題二：在空格中填入適當的數，並將下列各式變成完全平方式。

(1)  $x^2 - 5x + \square$

(2)  $x^2 + 7x + \square$

解：

(1) 利用集滿「 $a^2 - 2ab + b^2$ 」就可以換成  $(a - b)^2$ 。

$$x^2 - 5x + \square$$

這裡的  $x^2$  當成  $a^2$ ，就是把  $x$  當成  $a$ ；那麼  $5x$  就是  $2ab$ ，

想一下  $5x = 2 \cdot x \cdot \underline{\quad?}$ ，問號會是多少？

$$5x = 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2}，也就是把 \frac{5}{2} 當成 b；$$

所以最後再加個  $b^2$  就集滿「 $a^2 - 2ab + b^2$ 」了。

如下面的式子：

$$x^2 - 5x + \square = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \square$$
$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2}$$

所以  $\square$  只要填入  $(\frac{5}{2})^2$ ，就有集滿「 $a^2 - 2ab + b^2$ 」，可以變成

$$(a - b)^2。$$

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \text{ 變成完全平方式！}$$

$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$$



(2) 利用集滿「 $a^2 + 2ab + b^2$ 」就可以換成  $(a + b)^2$ 。

$$x^2 + 7x + \square$$

這裡的  $x^2$  當成  $a^2$ ，就是把  $x$  當成  $a$ ；那麼  $7x$  就是  $2ab$ ，

想一下  $7x = 2 \cdot x \cdot \underline{\quad ? \quad}$ ，問號會是多少？

$$7x = 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2}，就是把 \frac{7}{2} 當成 b；$$

所以最後再加個  $b^2$  就集滿「 $a^2 + 2ab + b^2$ 」了。

如下面的式子：

$$x^2 + 7x + \square = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2} + \square$$
$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2}$$

所以  $\square$  只要填入  $(\frac{7}{2})^2$ ，就有集滿「 $a^2 + 2ab + b^2$ 」，可以變成

$$(a + b)^2。$$

$$x^2 + 7x + (\frac{7}{2})^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2} + (\frac{7}{2})^2 = (x + \frac{7}{2})^2 \text{ 變成完全平方式！}$$

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

★省思：

我們來對照一下這些例子！

$$\text{甲、 } x^2 + 6x + \boxed{3^2} = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$$

$$\text{乙、 } x^2 - 10x + \boxed{5^2} = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x - 5)^2$$

$$\text{丙、 } x^2 - 5x + \boxed{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2$$

$$\text{丁、 } x^2 + 7x + \boxed{\left(\frac{7}{2}\right)^2} = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2$$

從這 4 個例子觀察，可以看到一些特性，

$x^2$  係數都是 1，框框填的都是原本  $x$  前面數字一半的平方，

也就是  $b$  會是原本  $x$  前面數字的一半。例如：

甲、  $x^2 + 6x$  的  $x$  前面數字是 6， $b$  計算出來就是 3，3 就是 6 的一半。

$x^2 + 6x$  再加上  $3^2$  才集滿「 $x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$ 」可以換成  $(x + 3)^2$ ；

乙、  $x^2 - 10x$  的  $x$  前面數字是 10， $b$  計算出來就是 5，5 就是 10 的一

$x^2 - 10x$  再加上  $5^2$  才集滿「 $x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2$ 」可以換成  $(x - 5)^2$ ；

丙、  $x^2 - 5x$  的  $x$  前面數字是 5， $b$  計算出來就是  $\frac{5}{2}$ ， $\frac{5}{2}$  就是 5 的一半。

$x^2 - 5x$  再加上  $\left(\frac{5}{2}\right)^2$  才集滿「 $x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$ 」可以換成  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$ ；

丁、  $x^2 + 7x$  的  $x$  前面數字是 7， $b$  計算出來就是  $\frac{7}{2}$ ， $\frac{7}{2}$  就是 7 的一半。

$x^2 + 7x$  再加上  $\left(\frac{7}{2}\right)^2$  才集滿「 $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2$ 」可以換成  $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2$ 。

## 重點提問

1. 根據上面的課文，我們可以利用哪兩個乘法公式來將式子配成完全平方式？

2. 請在空格中填入適當的數，並變成完全平方式： $x^2 + mx + \square$ 。

從題目來觀察，應該要利用和的平方公式來協助配成完全平方法。

集滿「 $a^2 + 2ab + b^2$ 」，就可以換成  $(a + b)^2$ ！

將 \_\_\_\_\_ 當成  $a$ 、\_\_\_\_\_ 當成  $2ab$ ， $mx = 2 \cdot \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ ，

那麼 \_\_\_\_\_ 當成  $b$ ，所以  $\square$  要填入  $b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

填入之後， $x^2 + mx + \square =$

它的完全平方式就是 \_\_\_\_\_。

• 隨堂練習：

1. 在空格中填入適當的數，並變成完全平方式： $x^2 + 2x + \square$

2. 在空格中填入適當的數，並變成完全平方式： $x^2 - 8x + \square$

3. 在空格中填入適當的數，並變成完全平方式： $x^2 + 3x + \square$

4. 在空格中填入適當的數，並變成完全平方式： $x^2 - x + \square$

如果 Ex1、Ex2  
還是不太懂，  
請看下面影片(1)



<https://www.youtube.com/>

還想多看幾題範例，  
請看下面影片(2)



[https://www.youtube.com/  
watch?v=tUGmuWF2rvI](https://www.youtube.com/watch?v=tUGmuWF2rvI)

## 課文 C：利用配方法解 $x^2$ 係數為 1 的一元二次方程式

---

懂了利用平方根的概念解一元二次方程式，也知道如何將一個一元二次多項式配成完全平方後，接下來就來看如何利用配方法解一般的一元二次方程式吧！

課文 A 一開始就舉出一個例子，解一元二次方程式  $x^2 + 6x + 2 = 0$ ，這個等號左邊的  $x^2 + 6x + 2$  無法利用因式分解法來解。

那麼怎麼利用配方法來解呢？

如果我們可以將式子變成「 $(x + \square)^2 = \bigcirc$ 」這個形式的話，就可以用平方根的概念來解了。

首先，我們思考一下，是要解出什麼來？

是要解一元二次方程式  $x^2 + 6x + 2 = 0$  這個方程式的解，求出  $x$ ，

所以主角是  $x$ ！

那麼我們就習慣將跟  $x$  比較有關的  $x^2$ 、 $+6x$  放一起，把  $+2$  移項到等號右邊，那麼式子就會變成： $x^2 + 6x = -2$ 。

根據前面的說明，就是要想辦法配出完全平方來，要配成完全平方需要集滿「 $a^2 + 2ab + b^2$ 」才可以換成  $(a + b)^2$ 。

嘗試處理  $x^2 + 6x$ ，把  $x^2$  當成  $a^2$ ，就是把  $x$  當成  $a$ ；那  $6x$  就當成是  $2ab$ ，但是還缺少  $b^2$ ，再加上  $b^2$  就集滿「 $a^2 + 2ab + b^2$ 」。根據課文 B，我們要加上  $x$  前面數字的一半，也就是  $x^2 + 6x$  再加上  $3^2$ ，就可以配成完全平方了。

因為是等式，等號左邊要加上  $3^2$ ，等號右邊當然也要加上  $3^2$ ，才能維持等式成立，所以式子就會變成： $x^2 + 6x + 3^2 = -2 + 3^2$

$$\begin{aligned} \text{等式左邊：} & x^2 + 6x + 3^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2 \\ & \boxed{a^2 + 2 a b + b^2 = (a + b)^2} \end{aligned}$$

$$\text{所以式子可以整理成：} (x + 3)^2 = -2 + 3^2$$

$$(x + 3)^2 = -2 + 9$$

$$(x + 3)^2 = 7$$

這時候我們就可以利用平方根的概念來解了，

整個的平方等於 7： $\boxed{(x + 3)^2} = 7$ ，所以  $\boxed{(x + 3)} = \sqrt{7}$  或  $-\sqrt{7}$ 。

$$x + 3 = \sqrt{7} \quad \text{或} \quad x + 3 = -\sqrt{7}, \quad \text{也可以寫成} \quad x + 3 = \pm\sqrt{7}$$

$$x = -3 + \sqrt{7} \quad \text{或} \quad x = -3 - \sqrt{7}$$

再來看一題吧！

例題一：利用配方法解一元二次方程式  $x^2 - 10x + 8 = 0$

◎解題思維：

移項一下，式子變成： $x^2 - 10x = -8$ ，我們就來想怎麼配成平方。

$x^2 - 10x$ ，我們要集滿「 $a^2 - 2ab + b^2$ 」換成  $(a - b)^2$ 。

把  $x^2$  當成  $a^2$ ，就是把  $x$  當成  $a$ ；那  $10x$  就當成是  $2ab$ ，

所以還缺少  $b^2$ ，再加上  $b^2$  就集滿「 $a^2 - 2ab + b^2$ 」。根據課文 B，

我們要加上  $x$  前面數字的一半，也就是  $x^2 - 10x$  再加上  $5^2$ ，就可

以配成完全平方了。

因為是等式，等號左邊要加上  $5^2$ ，等號右邊當然也要加上  $5^2$ ，

才能維持等式成立，所以式子就會變成： $x^2 - 10x + 5^2 = -8 + 5^2$

等式左邊： $x^2 - 10x + 5^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x - 5)^2$   
 $a^2 - 2 a b + b^2 = (a - b)^2$

所以式子可以整理成： $(x - 5)^2 = -8 + 5^2$

$$(x - 5)^2 = -8 + 25$$

$$(x - 5)^2 = 17$$

這時候我們就可以利用平方根的概念來解了。

解：  $x^2 - 10x + 8 = 0$

$$x^2 - 10x = -8$$

$$x^2 - 10x + 5^2 = -8 + 5^2 = -8 + 25 = 17$$

$$(x - 5)^2 = 17$$

$$(x - 5) = \sqrt{17} \quad \text{或} \quad (x - 5) = -\sqrt{17}$$

$$x = 5 + \sqrt{17} \quad \text{或} \quad 5 - \sqrt{17}$$

再來練習看看一題比較難配方的題目！

例題二：利用配方法解一元二次方程式  $x^2 - 5x = 2$

◎解題思維：

跟  $x$  比較有關的已經一起，接下來就來想怎麼配成平方吧！

$x^2 - 5x$ ，我們要集滿「 $a^2 - 2ab + b^2$ 」換成  $(a - b)^2$ 。

把  $x^2$  當成  $a^2$ ，就是把  $x$  當成  $a$ ；那  $5x$  就當成是  $2ab$ ，

想一下  $5x = 2 \cdot x \cdot \underline{\quad ? \quad}$ ，問號會是多少？

$5x = 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2}$ ，也就是說把  $\frac{5}{2}$  當成  $b$ 。

有  $a^2$ 、 $2ab$ ，所以還缺少  $b^2$ ，再加上  $b^2$  就集滿「 $a^2 - 2ab + b^2$ 」。

也就是  $x^2 - 5x$  再加上  $(\frac{5}{2})^2$ ，就可以配成完全平方了。



因為是等式，等號左邊要加上  $(\frac{5}{2})^2$ ，等號右邊當然也要加上  $(\frac{5}{2})^2$ ，  
 才能維持等式成立，所以式子就會變成： $x^2 - 5x + (\frac{5}{2})^2 = 2 + (\frac{5}{2})^2$

$$\begin{aligned} \text{等式左邊：} & x^2 - 5x + (\frac{5}{2})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + (\frac{5}{2})^2 = (x - \frac{5}{2})^2 \\ & \boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2} \\ \text{所以式子可以整理成：} & (x - \frac{5}{2})^2 = 2 + (\frac{5}{2})^2 \\ & (x - \frac{5}{2})^2 = 2 + \frac{25}{4} \\ & (x - \frac{5}{2})^2 = \frac{8}{4} + \frac{25}{4} \\ & (x - \frac{5}{2})^2 = \frac{33}{4} \end{aligned}$$

這時候我們就可以利用平方根的概念來解了。

**解**：  $x^2 - 5x - 2 = 0$

$$x^2 - 5x = 2$$

$$x^2 - 5x + (\frac{5}{2})^2 = 2 + (\frac{5}{2})^2 = 2 + \frac{25}{4} = \frac{8}{4} + \frac{25}{4} = \frac{33}{4}$$

$$(x - \frac{5}{2})^2 = \frac{33}{4}$$

$$(x - \frac{5}{2}) = \sqrt{\frac{33}{4}} \quad \text{或} \quad (x - \frac{5}{2}) = -\sqrt{\frac{33}{4}}$$

$$(x - \frac{5}{2}) = \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{4}} \quad \text{或} \quad (x - \frac{5}{2}) = -\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{4}}$$

$$(x - \frac{5}{2}) = \frac{\sqrt{33}}{2} \quad \text{或} \quad (x - \frac{5}{2}) = -\frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{33}}{2} + \frac{5}{2} \quad \text{或} \quad x = -\frac{\sqrt{33}}{2} + \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5+\sqrt{33}}{2} \quad \text{或} \quad \frac{5-\sqrt{33}}{2}$$

## 重點提問

1. 根據上面的課文，請用自己的話解釋一下什麼是「配方法」。

2. 請利用配方法解一元二次方程式  $x^2 + 4x - 4 = 0$

• 隨堂練習：

1. 利用配方法解一元二次方程式  $x^2 + 8x - 7 = 0$

2. 利用配方法解一元二次方程式  $x^2 - 2x = 3$

3. 利用配方法解一元二次方程式  $x^2 + x - 1 = 0$

4. 利用配方法解一元二次方程式  $x^2 - 3x = 10$

還想多看幾題範例，  
請看下面影片



[https://www.youtube.com/  
watch?v=bdfnaofZZ0](https://www.youtube.com/watch?v=bdfnaofZZ0)