

課文 C：一元二次方程式的判別式

接下來我們要講另一個主題－判別式。

什麼是判別式呢？我們舉一個簡單的例子來看看！

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 這是一個一元二次方程式，那我們現在要來解它。

因為它沒有辦法用十字交乘做，所以我們希望用公式解。

公式解的第一步需要知道判斷 a 是多少， b 是多少， c 是多少？

以這題目來看 $a = 1$ 、 $b = 2$ 、 $c = 3$ ， a, b, c 都判斷出來了，就可以

代公式啦！藉由公式知道

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}\end{aligned}$$

各位同學，算到這裡你會覺得非常奇怪，根號裡有負的嗎？

在我們國中範圍根號裡面不能有負的。

因為 $\sqrt{7}$ 代表的意思是找到某一個數，這個數的平方是 7。

但萬一根號裡面是負的，像這裡 $\sqrt{-8}$ ，你要找到一個數使得它平方等於 -8 。

可是如果這個數是正的，正的平方，正正得正，這是不可能的；那如果這個數是負的，負的平方，負負得正，這也不可能。

所以你沒有辦法找到一個數，使得它平方等於 -8 。

很明顯地在國中的範圍沒有這樣的東西，這樣的東西是不存在的。

$$\sqrt{7} : \square^2 = 7$$

$$\sqrt{-8} : \square^2 = -8 \xrightarrow{\text{BUT}} \begin{cases} \text{正數}^2 = \text{正數} \neq -8 \\ \text{負數}^2 = \text{正數} \neq -8 \end{cases}$$

這時候就產生一個問題，當我們用一元二次方程式的一般式

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ 推導出來的公式 } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ 得到 } x \text{ 的解，在}$$

國中範圍可能是沒有解耶！

老師一開始講過這個一般式可以表示所有的一元二次方程式，因此理論上來講所有的一元二次方程式都可以透過這個公式把它解出來，但是

現在我們遇到了這個例子卻算不出來。為什麼沒有辦法算出來呢？

因為我們沒有辦法擔保根號中的 $b^2 - 4ac$ 一定是正的，萬一它是負的，

表示此一元二次方程式無解。那我們來思索一下，姑且不論 a 是多少，

b 是多少， c 是多少，這個 $b^2 - 4ac$ 一定是個數字，而這個數字會有

3 種可能—要嘛是正的，要嘛是負的，要嘛就是零。

當它是正的時候，這個公式沒有問題，代進去的確算的出來；當它是

0，代進去 $\sqrt{0}$ 也無所謂，因為 $\sqrt{0} = 0$ ，還是可以算得出來；但如果

當它是負的，那就沒有解囉！

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow b^2 - 4ac = \begin{cases} \text{正} \rightarrow \text{OK!} \\ 0 \rightarrow \text{OK!} \\ \text{負} \rightarrow \text{OK!} \end{cases}$$

這個 $b^2 - 4ac$ 在數學上，我們就叫它判別式。

判別式是什麼東西呢？判別根的數量與情況——根的數量就是它究竟有幾個根；根的情況就是看他是兩相異根，還是重根，還是沒有解。

接下來我們就依照前面的敘述把 $b^2 - 4ac$ 分 3 種情況來討論。

※第一種情況 $b^2 - 4ac > 0$ ，也就是正的，這時公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

是可以正常算出來的，因此我們把這種情況稱為兩相異解或兩相

異根（就是兩個不同根啦！），其中一個是 $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ，另一

個就是 $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

※第二種情況 $b^2 - 4ac = 0$ ，這時公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} =$

$\frac{-b}{2a}$ 。接著你會問：「老師，你不是說一元二次方程式會有兩個答案

嗎？為什麼這裡只有一個答案 $\frac{-b}{2a}$ ？」其實這裡也是兩個，一個是

$\frac{-b+0}{2a}$ ，一個是 $\frac{-b-0}{2a}$ ，加 0 減 0 是一樣的效果，這種情況我們叫做

重根，它還是有兩個根喔！此時兩個根相等。

※第三種情況 $b^2 - 4ac < 0$ ，也就是負的，這時公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

就沒有辦法算出來，因為根號裡面是負的，在國中的範圍我們沒有

辦法算出 x ，這種情況我們叫做無解。

到這裡我們就可以利用 $b^2 - 4ac$ 是大於 0，等於 0 或小於 0 來判斷出根的數目和根是什麼樣子，因此我們就叫 $b^2 - 4ac$ 為判別式，通常用大寫 D 來表示判別式。

$$b^2 - 4ac \begin{cases} > 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \text{兩相異解} \\ = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a} \rightarrow \text{重根} \\ < 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\cancel{b^2 - 4ac}}}{2a} \rightarrow \text{無解} \end{cases}$$

例題一：判斷下列一元二次方程式根的情形？

(A) $x^2 + x + 1 = 0$ (B) $x^2 + 2x - 1 = 0$ (C) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

解：

(A) $a = 1$ 、 $b = 1$ 、 $c = 1$ ，因此判別式是負的，因此這題是無解。

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1^2 - 4 = -3 < 0$$

(B) $a = 1$ 、 $b = 2$ 、 $c = -1$ ，因此判別式是正的，因此這題是兩相異實根。

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 - (-4) = 4 + 4 = 8 > 0$$

(C) $a = 4$ 、 $b = -12$ 、 $c = 9$ ，因此判別式是 0，它的兩個根是一樣的，也就是重根。

$$D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$$

重點提問

1. 根據上面的課文，請用自己的話解釋一下什麼是一元二次方程式的「判別式」。並舉出一個例子說明。

2. 根據上面的課文，「判別式」的值會有那些種狀況？這些狀況各自代表什麼情形？解釋每種狀況都並各舉一個例子來說明。

• 隨堂練習：

1. 連連看，請將左式的一元二次方程式和右邊解的情形做適當的配對。

一元二次方程式	解的情形
(1) $x^2 + x + 4 = 0$ •	
(2) $x^2 - 4x + 4 = 0$ •	• 有兩相異根
(3) $x^2 + 8x - 7 = 0$ •	
(4) $-x^2 + 2x + 1 = 0$ •	• 有兩相同根
(5) $-x^2 - x - 1 = 0$ •	(重根)
(6) $-2x^2 - x + 1 = 0$ •	
(7) $2x^2 - x - 2 = 0$ •	• 無解
(8) $-3x^2 + 6x - 3 = 0$ •	

還是不太懂，
請看下面影片(1)



<https://www.youtube.com/watch?v=nSPZH131Mm8>

如果例題一還是不太懂，
請看下面影片(2)



<https://www.youtube.com/watch?v=jAwJY-mJxvo>

單元五：一元二次方程式的應用問題

課文 A：一元二次方程式的應用問題

在熟練一元二次方程式的解法後，我們要開始學習解一元二次方程式的應用問題。解應用問題和解一元二次方程式大同小異，比較不同的是式子必須要自己列出來，那麼怎麼自己列出式子呢？

有四個重要的步驟：

步驟一：理解題目並假設未知數。

步驟二：利用題目裡面所提供的「數量間關係」，列出等式。

步驟三：解一元二次方程式。

步驟四：檢查答案是否符合題意。

下面有五道題，每一題都是常見並且有趣的問題，接下來就來試試看吧！

例題一：兩個連續的正整數，其平方和是 85，則此兩數分別為何？

解：

兩個連續的正整數就可以假設成 x 、 $x + 1$ ，而且 $x > 0$ 。

再來找一下題目當中有關於這兩個正整數的關係：其平方和是 85，

這句話的意思就是說它們平方後相加會得到 85。

我們就可以根據前述關係列出一個等式，兩個連續的正整數 x 、

$x + 1$ ，平方分別會是 x^2 、 $(x + 1)^2$ ，相加會等於 85，式子就可

以列成： $x^2 + (x + 1)^2 = 85$ 。接下來就是解這個一元二次方程式

了！

$(x + 1)^2$ 就是 $x^2 + 2x + 1$ ，

所以展開得到： $x^2 + (x^2 + 2x + 1) = 85$

整理一下： $2x^2 + 2x + 1 = 85$

85 移項變成 -85 ： $2x^2 + 2x + 1 - 85 = 0$

整理一下： $2x^2 + 2x - 84 = 0$

$2x^2$ 、 $2x$ 、 -84 有公因數 2，而且是等式，所以可以一起除以 2：

$$x^2 + x - 42 = 0$$

前面 x^2 可以拆成 x 乘 x ；後面 -42 可以拆成 $+7$ 乘 -6 ，交叉相乘：

$$\begin{array}{r} x \qquad \qquad + 7 \\ \quad \times \quad \quad \quad \\ x \qquad \qquad - 6 \\ \hline + 7x - 6x = +x \end{array}$$

等號左邊 $x^2 + x - 42 = (x + 7)(x - 6)$

整個式子就是 $(x + 7)(x - 6) = 0$

所以 $x + 7 = 0$ 或 $x - 6 = 0$

移項整理得到 $x = -7$ 或 6

這樣子的解解出來有兩個，但是要回去檢驗一下符不符合題意，

如果 $x = -7$ ，那麼這兩個數會是 -7 、 -6 ，並不符合題意，因為
題目說的是正整數，正整數必須要是正的，所以不合。

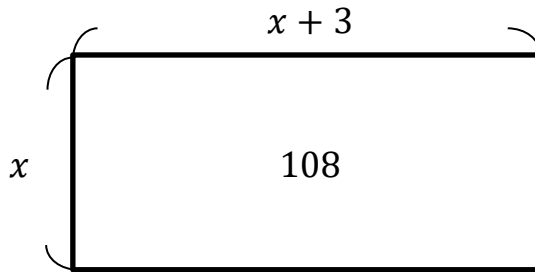
如果 $x = 6$ ，那麼這兩個數會是 6 、 7 ，符合題意，平方相加試試看，
 $6^2 + 7^2 = 36 + 49 = 85$ ，與題意相符合，所以這兩個數就是 6 、 7 。

例題二：有一個長方形面積為 108 平方公分，若長比寬多 3 公分，
請問這個長方形的長寬各為多少公分？

解：

假設寬是 x 公分，長比寬多 3 公分，所以長是 $x + 3$ 公分。

接下來要找關係，可以畫圖幫助理解一下，



我們知道長方形的面積算法就是長乘以寬，長是 $x + 3$ 、寬是 x ，

所以面積算法就是 $x(x + 3)$ ，從題目可以知道，面積也就是 108。

所以可以列式： $x(x + 3) = 108$ 。接下來就解這個一元二次方程式
了！

展開 $x(x + 3) = x^2 + 3x$ ，所以展開式子成： $x^2 + 3x = 108$

108 移項變成 -108 ： $x^2 + 3x - 108 = 0$

前面 x^2 可以拆成 x 乘 x ；後面 -108 可以怎麼拆呢？

-108 是負的，會拆成一正乘一負，中間是 $+3$ ，所以拆出來的兩數，

正數的絕對值會負數的絕對值還要多 3；發現 $108 = 9 \times 12$ ， -108 可以拆成 -9 乘 $+12$ 。

交叉相乘：

$$\begin{array}{r} x \qquad \quad -9 \\ \qquad \quad \times \\ x \qquad \quad +12 \\ \hline -9x + 12x = +3x \end{array}$$

等號左邊 $x^2 + 3x - 108 = (x - 9)(x + 12)$

整個式子就是 $(x - 9)(x + 12) = 0$

所以 $x - 9 = 0$ 或 $x + 12 = 0$

移項整理得到 $x = 9$ 或 -12

這樣子的解解出來有兩個，但是要回去檢驗一下符不符合題意，

如果 $x = 9$ ，那麼寬會是 9、長會是 12，長寬可以是正的。

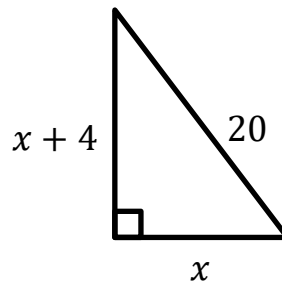
如果 $x = -12$ ，長寬會是 -12 、 -9 ，長寬不可以是負的，所以不合。

所以這個長方形的長是 12 (公分)、寬是 9 (公分)。

例題三：有一個直角三角形，兩股長度差 4 公分，斜邊長 20 公分，求這個直角三角形面積為何？

解：從題目我們知道，兩股長度差 4 公分，所以如果把比較短的股當底，假設為 x 公分，那麼比較長的股就可以當高，假設成 $(x + 4)$ 公分。從題目知道斜邊長是 20 公分。

畫個圖幫助理解一下！



接下來要利用關係來列式，這個關係是什麼呢？

看一下題目：直角三角形，兩股長差 4，斜邊長 20。

從圖中可以看到， x 、 $x + 4$ 、20，這三個是直角三角形的三邊，在直角三角形中有一個很重要的三邊關係(畢氏定理)：兩股平方和等於斜邊平方。

所以式子可以列成： $x^2 + (x + 4)^2 = 20^2$ ，接下來就是解這個一元二次方程式了！

$(x + 4)^2$ 就是 $x^2 + 8x + 16$ ，

所以展開得到： $x^2 + (x^2 + 8x + 16) = 400$

整理一下： $2x^2 + 8x + 16 = 400$

400 移項變成 -400 ： $2x^2 + 8x + 16 - 400 = 0$

整理一下： $2x^2 + 8x - 384 = 0$

$2x^2$ 、 $8x$ 、 -384 有公因數 2，而且是等式，所以可以一起除以 2：

$$x^2 + 4x - 192 = 0$$

前面 x^2 可以拆成 x 乘 x ；後面 -192 可以怎麼拆呢？

-192 是負的，會拆成一正乘一負，中間是 $+4$ ，所以拆出來的兩數，

正數的絕對值會比負數的絕對值還要多 4；發現 $192 = 16 \times 12$ ，

-192 可以拆成 -12 乘 $+16$ 。

交叉相乘：

$$\begin{array}{cc} x & -12 \\ x & +16 \\ \hline -12x & +16x = +4x \end{array}$$

整個式子就是 $(x - 12)(x + 16) = 0$

所以 $x - 12 = 0$ 或 $x + 16 = 0$

移項整理得到 $x = 12$ 或 -16

這樣子的解解出來有兩個，還是要回去檢驗一下符不符合題意，

如果 $x = 12$ ，那麼一股會是 12、另一股會是 16，兩股可以是正數。

如果 $x = -16$ ，那麼一股會是 -16、另一股會是 -12，但是兩股不可以是負數，所以不合。

短的股（底）會是 12(公分)、長的股（高）會是 16(公分)，三角形面積會是 $\frac{12 \times 16}{2} = 96$ （平方公分）。

例題四：平安旅行社舉辦旅遊活動，預計人數 30 人，每人收費 5000 元，當人數達到 30 人後，每多 1 人，每人收費就便宜 100 元。若已知這次活動，平安旅行社總收入為 160000 元，請問共有多少人參加？

解：先理解一下題目的意思：旅行社舉辦旅遊活動，預計人數 30 人，每人收費 5000 元，所以預計總收入會是 $30 \times 5000 = 150000$ 元。但實際上總收入是 160000 元，不是 150000 元，所以不可能是 30 人參加旅遊活動！

因為題目中有提到：當人數達到 30 人後，每多 1 人，每人收費就便宜 100 元，這是很重要條件！這個條件是什麼意思呢？

當人數達到 30 人後，每多 1 人，每人收費就便宜 100 元，就是說如果

有 $(30 + 1)$ 人參加旅遊活動，每人就收費 $(5000 - 100 \times 1)$ 元；

有 $(30 + 2)$ 人參加旅遊活動，每人就收費 $(5000 - 100 \times 2)$ 元；

有 $(30 + 3)$ 人參加旅遊，每人就收費 $(5000 - 100 \times 3)$ 元；以此類推

可是我們不知道有多少人參加啊，所以我們就可以假設成有

$(30 + x)$ 人參加，那麼每人收費就會是 $(5000 - 100x)$ 元。

假設完後，利用關係來列式，題目當中有提到總收入為 160000 元，

總收入的算法就是「人數 \times 每人收的費用」，所以 $(30 + x)$ 人參加，

每人收費是 $(5000 - 100x)$ 元，總收入就是 $(30 + x)(5000 - 100x)$

元，式子就可以列成： $(30 + x)(5000 - 100x) = 160000$ 。

$$\begin{aligned} \text{展開 } (30 + x)(5000 - 100x) &= 150000 - 3000x + 5000x - \\ &100x^2, \end{aligned}$$

$$= 150000 + 2000x - 100x^2$$

所以展開式子成： $150000 + 2000x - 100x^2 = 160000$

150000、2000、-100、160000 有公因數 100，而且是等式，

所以可以一起除以 100： $1500 + 20x - x^2 = 1600$

1600 移項變成 -1600： $1500 + 20x - x^2 - 1600 = 0$

$$\text{整理一下：} -x^2 + 20x - 100 = 0$$

習慣上會希望一元二次方程式的 x^2 項係數為正，所以可以同乘 -1：

$$x^2 - 20x + 100 = 0$$

這個方程式可以利用差的平方公式： $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 來

解， x 當成 a ， $20x = 2 \cdot x \cdot 10$ ，10 當成 b ， $10^2 = 100$ ，符合乘

法公式，故式子可以化成 $(x - 10)^2 = 0$ 。

$$x - 10 = 0$$

所以 $x = 10$ ，所以這次旅遊活動有 $30 + 10 = 40$ 人參與，每人收

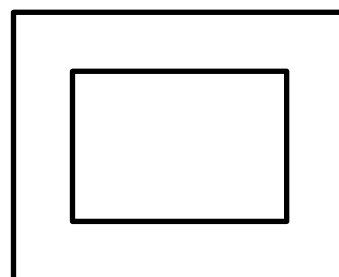
費 $5000 - 100 \times 10 = 4000$ 元。

例題五：一塊長方形農地，長比寬多 4 公尺，預計

農地內部四周圍開闢一條寬 2 公尺的道路，

剩下部分作果園，如圖。若果園面積是農地

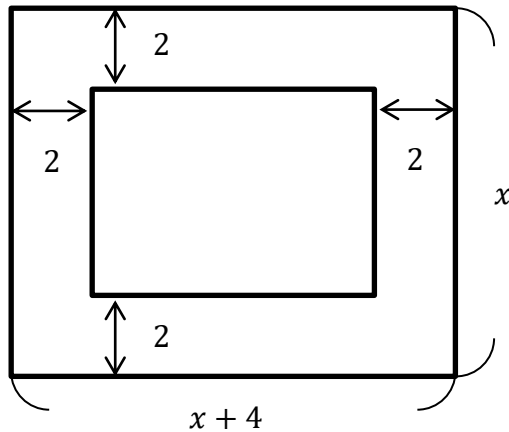
面積的 $\frac{5}{6}$ ，則原來農地的長、寬各是多少？



解：

可以假設農地的寬是 x 公尺，長比寬多 4 公尺，所以長就會是 $(x + 4)$ 公尺。

農地內部四周圍開闢一條寬 2 公尺的道路，可以畫圖幫助理解：



而題目中的關係就是果園面積是農地面積的 $\frac{5}{6}$ ，所以要列出式子需要果園面積跟農地面積。

從圖中來看，果園面積與農地面積明顯都是長方形，面積算法都會是長乘以寬。農地的寬是 x 公尺，長是 $(x + 4)$ 公尺，所以面積就是 $x(x + 4)$ 平方公尺。

而農地內部四周圍開闢一條寬 2 公尺的道路後，剩下的就是果園面積，所以果園的寬會是 $(x - 4)$ 公尺，長是 $(x + 4 - 4)$ 公尺，所以面積就是 $(x - 4)x$ 平方公尺。

果園面積是農地面積的 $\frac{5}{6}$ ，

所以式子可以列成 $(x - 4)x = \frac{5}{6}x(x + 4)$ 。

展開 $(x-4)x = \frac{5}{6}x(x+4)$

$$x^2 - 4x = \frac{5}{6}x^2 + \frac{10}{3}x$$

習慣上，讓式子變成是整數的會比較好計算，所以同乘以 6：

$$6x^2 - 24x = 5x^2 + 20x$$

移項整理： $6x^2 - 24x - 5x^2 - 20x = 0$

$$x^2 - 44x = 0$$

可以提公因式 x ： $x(x - 44) = 0$

所以 $x = 0$ 或 $x - 44 = 0$

移項整理得到 $x = 0$ 或 44

這樣子的解解出來有兩個，但是要回去檢驗一下符不符合題意，

如果 $x = 0$ ，長度不可能是零，所以不合。

如果 $x = 44$ ，原來農地的長就是 48 公尺、寬就是 44 公尺。

重點提問

1. 從上面第 75 頁的課文中我們可以知道，解一元二次方程式應用題有四個重要的步驟，請你依序把它些出來。

步驟一：_____

步驟二：_____

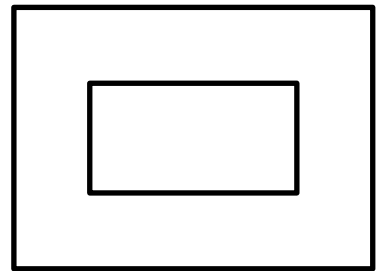
步驟三：_____

步驟四：_____

2. 解一元二次方程式應用題在假設完未知數後，接著我們要去找題目中「數量間的關係」，請問找題目中「數量間的關係」是為了作什麼？

4. 安平旅行社為招攬乘客到花蓮遊玩，訂定為每人收費 2000 元，但是如果一團的人數超過 12 人，每增加 1 人，則每人可減收 100 元。已知某一團總共收到了 25500 元，請問這一團共有多少人參加？

5. 小湘的房間是一個長方形，而且長比寬多 3 公尺，她在房間的中間擺了一塊長方形地毯，地毯邊緣與牆邊的垂直距離都是 1.5 公尺，如圖所示。如果地毯面積是房間的 $\frac{1}{4}$ 倍，則小湘房間的長、寬各是多少公尺？



想看例題四、五的類似題，
請看下面影片(1)



[https://www.youtube.com/
watch?v=rj0jLfkTezk](https://www.youtube.com/watch?v=rj0jLfkTezk)

還想看進階題，
請看下面影片(2)



[https://www.youtube.com/
watch?v=UWDCQXi9pss](https://www.youtube.com/watch?v=UWDCQXi9pss)

例題三還不太懂
請看下面影片(3)



[https://youtu.be/htGollj
Nqwg](https://youtu.be/htGolljNqwg)

還想看進階題，
請看下面影片(4)



[https://www.youtube.com/w
atch?v=AQA8nUkeNXk](https://www.youtube.com/watch?v=AQA8nUkeNXk)

還想看進階題，
請看下面影片(5)



[https://www.youtube.com/
watch?v=BVE5X0kg20s](https://www.youtube.com/watch?v=BVE5X0kg20s)