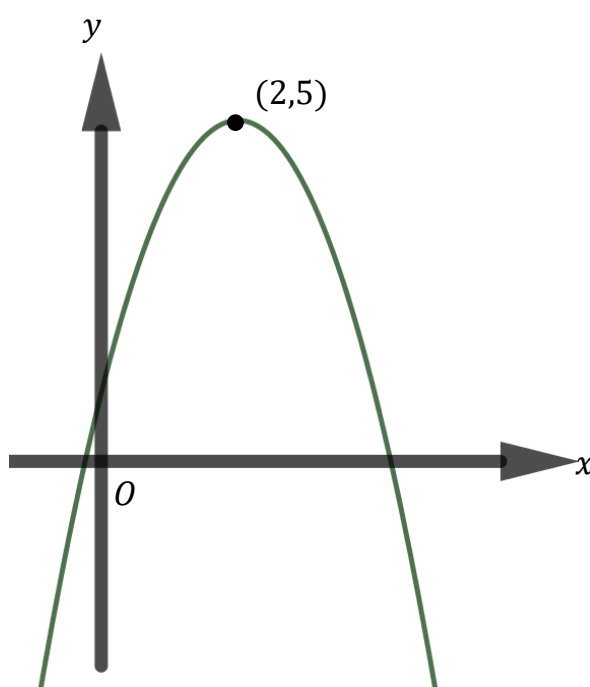


單元四 二次函數的最大值或最小值及其應用

課文A： 二次函數的最大值或最小值

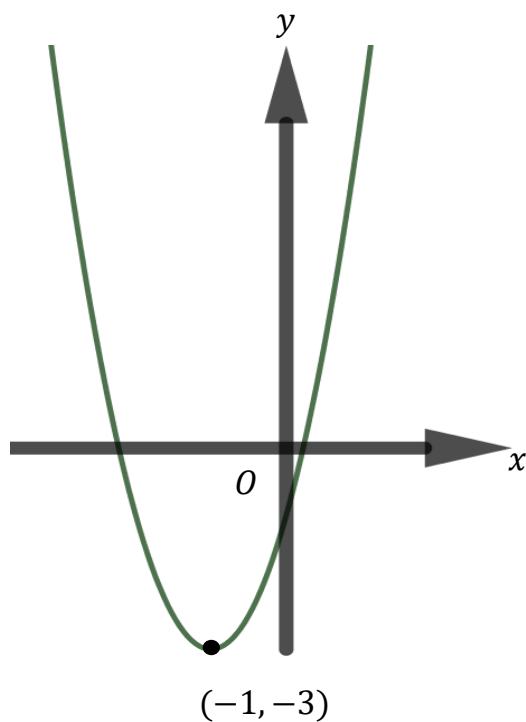
在前面的課文當中，畫過很多種二次函數圖形，有開口向上的，也有開口向下的。如果二次函數圖形開口向下，那麼就有一個最高點，例如 $y = -(x - 2)^2 + 5$ 的函數圖形：



在函數圖形上的點，其 y 坐標就是 x 坐標所對應的函數值，例如「(0,1) 在函數圖形上」表示「當 $x = 0$ 時，對應的函數值 $y = 1$ 」。

而 $y = -(x - 2)^2 + 5$ 的函數圖形頂點 (2,5) 是最高點，也就是 $y = -(x - 2)^2 + 5$ 函數圖形上的點都不會比 (2,5) 還要高。換句話說，當 $x = 2$ 時， y 有最大值 5。

如果二次函數圖形開口是向上的，那麼就有一個最低點，例如 $y = 2(x + 1)^2 - 3$ 的函數圖形：



可以知道它的頂點 $(-1, -3)$ 是最低點，也就是 $y = 2(x + 1)^2 - 3$ 函數圖形上的點都不會比 $(-1, -3)$ 還要低。換句話說，當 $x = -1$ 時， y 有最小值 -3 。

從上面兩個例子就可以知道頂點可以顯示出函數的最大值或最小值，所以我們在討論一個函數的最大值或最小值問題時，可以先配成 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式來找出頂點，再根據開口的方向判斷是最大值還是最小值。

例題一：求下列二次函數的最大值或最小值，並寫出 x 的值為多少時，會得到最大值或最小值。

(1) $y = x^2 - 6x + 5$

(2) $y = 3x^2 - 6x + 10$

(3) $y = -x^2 - 6x - 9$

解：(1)函數在 $x = 3$ 時，有最小值 $y = -4$

(2)函數在 $x = 1$ 時，有最小值 $y = 7$

(3)函數在 $x = -3$ 時，有最大值 $y = 0$

重點提問

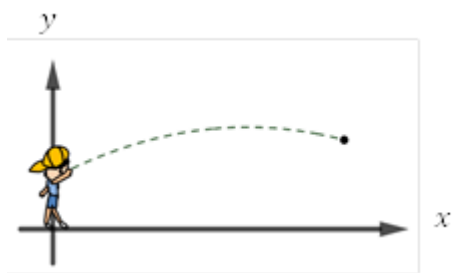
1. 根據上面的課文，想要求出二次函數的最大值或最小值，需要做什麼事呢？

課文B： 二次函數的應用問題

接下來我們就要看一些牽涉到最大值或最小值的應用問題。

拋體問題

例題一：小坪擲出棒球，已知棒球飛行的水平距離為 x 公尺，棒球離地面的高度為 y 公尺，這兩者滿足關係式： $y = -\frac{1}{24}(x^2 - 10x - 24)$



請問：

- (1) 擲球點離地面多少公尺？
- (2) 從擲球點到球落地時，飛行的水平距離為多少公尺？
- (3) 球飛行途徑的最高點離地面多少公尺？

解(1)：擲球點的位置就是棒球飛行的水平距離為 0 公尺的時候。

所以將 $x = 0$ 代入關係式 $y = -\frac{1}{24}(x^2 - 10x - 24)$ 中，

$$\text{得 } y = -\frac{1}{24}(0^2 - 10 \times 0 - 24) = -\frac{1}{24} \times (-24) = 1$$

故擲球點離地面 1 公尺。

解(2)：棒球落地時，此時離地面高度為 0 公尺，

所以令 $y = 0$ ，代入關係式得 $0 = -\frac{1}{24}(x^2 - 10x - 24)$ ，

$$-\frac{1}{24}(x^2 - 10x - 24) = 0$$

$$x^2 - 10x - 24 = 0$$

試試看利用十字交乘法來解，

$$x^2 - 10x - 24 = 0$$

$$(x - 12)(x + 2) = 0$$

$$x - 12 = 0 \text{ 或 } x + 2 = 0$$

$$x = 12 \text{ 或 } -2$$

$$\begin{array}{r} x \quad -12 \\ x \quad +2 \\ \hline -12x + 2x = -10x \end{array}$$

因為距離一定是正的，所以 -2 不合。

故從擲球點到球落地時，飛行的水平距離為 12 公尺。

解(3)：求棒球飛行途徑的最高點，就是要找出關係函數的頂點，將函數配方成「 $y = a(x - h)^2 + k$ 」形式時就可以找出頂點了。

$$y = -\frac{1}{24}(x^2 - 10x - 24)$$

$$y = -\frac{1}{24}(x^2 - 10x + 5^2 - 5^2 - 24)$$

$$y = -\frac{1}{24}(x^2 - 10x + 5^2 - 25 - 24)$$

$$y = -\frac{1}{24}[(x^2 - 10x + 5^2) - 25 - 24]$$

$$y = -\frac{1}{24}[(x^2 - 10x + 5^2) - 49]$$

$$y = -\frac{1}{24}(x - 5)^2 + \frac{49}{24}$$

當 $x = 5$ 時，有最大值 $y = \frac{49}{24}$ ，

也就是球飛行途徑的最高點離地面 $\frac{49}{24} \doteq 2.04$ 公尺。

例題二：小朱從高處斜上拋出石頭，經 x 秒後，石頭離地面高度 y 公尺，且滿足以下關係式： $y = -5x^2 + 10x + 5$ 請問：

- (1) 小朱一開始所在的位置多高？
- (2) 石頭飛行途徑的最高點離地面多少公尺？
- (3) 幾秒的時候石頭會落到地面上？

解(1)：一開始的位置就是時間在 0 秒時候的位置。

所以將 $x = 0$ 代入關係式 $y = -5x^2 + 10x + 5$ 中，

$$\text{得 } y = -5 \times 0^2 + 10 \times 0 + 5 = 5,$$

就表示小朱一開始所在的位置離地面 5 公尺。

解(2)：求石頭飛行途徑的最高點，就是要找出關係函數的頂點，將函數函

「 $y = a(x - h)^2 + k$ 」形式時就可以找出頂點了。

$$y = -5x^2 + 10x + 5$$

$$y = -5(x^2 - 2x) + 5$$

$$y = -5(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 5$$

$$y = -5[(x - 1)^2 - 1] + 5$$

$$y = -5(x - 1)^2 + 5 + 5$$

$$y = -5(x - 1)^2 + 10$$

當 $x = 1$ 時，有最大值 $y = 10$ ，就是石頭飛行途徑的最高點離地面為 10 公尺。

解(3)：石頭落地時，離地面高度為 0 公尺，

所以令 $y = 0$ ，代入關係式得 $0 = -5x^2 + 10x + 5$ ，

$$-5x^2 + 10x + 5 = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

沒辦法十字交乘，利用公式解： $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

先算算 $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{\cancel{2} \pm \cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 1 \pm \sqrt{2}$$

因為秒數一定是正的，所以 $1 - \sqrt{2}$ 秒不合。

故小朱拋出石頭經過 $1 + \sqrt{2} \doteq 2.4$ 秒，石頭會落到地面上。

銷售問題

例題三：平安旅行社舉辦旅遊活動，預計人數 30 人，每人收費 5000 元，當人數達到 30 人後，每多 1 人，每人收費就便宜 100 元。

假設這次活動已經達到 30 人了，又多了 x 人，總收入為 y 元，請問：

- (1) x 、 y 的關係式。
- (2) 當增加多少人時，旅行社才能收到最多錢？

最多一共可以收到多少錢？

※理解題目：在解應用問題的時候，要先理解一下題目的意思！

「辦旅遊活動，預計參加人數 30 人，每人收費 5000 元，當人數到 30 人後，每多 1 人，每人收費就便宜 100 元。」

而且想要列出參加人數跟總收入的關係。可以先舉一些實際的數字來觀察：

如果 30 人，每人收費 _____ 元，總收入 = _____ × _____ 元；

如果 31 人，每人收費 _____ 元，總收入 = _____ × _____ 元；

如果 32 人，每人收費 _____ 元，總收入 = _____ × _____ 元；

如果 33 人，每人收費 _____ 元，總收入 = _____ × _____ 元…

數值問題

例題四：已知有兩個數字的差為 4，假設兩數中較小的一數為 x 、兩數相乘為 y 。請問：

(1) x 和 y 的關係式。 (2) 兩數相乘的最小值為多少？

解(1)：有兩個數字的差為 4，假設兩數中較小的一數為 x ，代表另外一個數字就比 x 大 4，就是 $x + 4$ 。

這兩數相乘為 y ，所以可以列出函數關係式： $y = x(x + 4)$ ，

整理一下， $y = x(x + 4) = x^2 + 4x$

解(2)：已經知道函數關係後，想求出最小值，必須要進行配方法。

$$y = x^2 + 4x$$

$$y = x^2 + 4x + 2^2 - 2^2$$

$$y = (x^2 + 4x + 2^2) - 4 \Rightarrow y = (x + 2)^2 - 4$$

當 $x = -2$ 時，兩數相乘有最小值 $y = -4$ 。

例題五：已知有兩個數字的和為 24，假設兩數的其中一數為 x 、兩數相乘為 y 。請問：

(1) x 和 y 的關係式。 (2) 兩數相乘的最大值為多少？

解(1)：有兩個數字的和為 24，假設兩數中較小的一數為 x ，

代表另外一個數字就是 $24 - x$ 。

這兩數相乘為 y ，所以可以列出函數關係式： $y = x(24 - x)$ ，

整理一下， $y = x(24 - x) = 24x - x^2 = -x^2 + 24x$

解(2)：已經知道函數關係後，想求出最小值，必須要進行配方法。

$$y = -x^2 + 24x$$

$$y = -(x^2 - 24x)$$

$$y = -(x^2 - 24x + 12^2 - 12^2)$$

$$y = -(x^2 - 24x + 12^2) + 12^2$$

$$y = -(x^2 - 24x + 12^2) + 144$$

$$y = -(x - 12)^2 + 144$$

當 $x = 12$ 時，兩數相乘有最大值 $y = 144$ 。

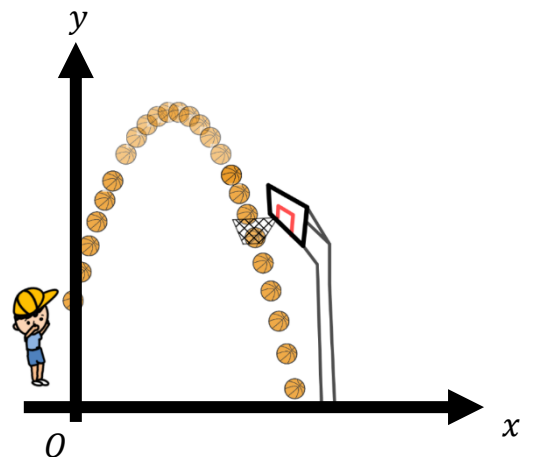
• 隨堂練習：

1. 小均 投出籃球，已知籃球飛行的水平距離為 x 公尺，籃球離地面的高度為 y 公尺，這兩者滿足關係式：

$$y = -x^2 + 4x + 2$$

請問：

- (1) 投籃點距離地面多少公尺？
- (2) 從投籃點到球落地時，飛行的水平距離為多少公尺？
- (3) 球飛行途徑的最高點離地面多少公尺？



2. 小強從高處斜向上射出石頭，經 x 秒後，石頭離地面高度 y 公尺，且滿足以下關係式：

$$y = -5x^2 + 20x + 5$$

請問：

- (1) 小強一開始所在的位置多高？
- (2) 石頭飛行途徑的最高點離地面多少公尺？
- (3) 幾秒的時候石頭會落到地面上？

3. 旅行社舉辦旅遊活動，預計人數 20 人，每人收費 4000 元，當人數達到 20 人後，每多 1 人，每人收費就便宜 200 元。假設這次活動已經達到 20 人了，又多了 x 人，總收入為 y 元，請問：

- (1) x 、 y 的關係式。
- (2) 當增加多少人時，旅行社才能收到最多錢？最多一共可以收到多少錢？

4. 已知有兩個數字的差為 10，假設兩數中較小的一數為 x 、兩數相乘為 y 。

請問：

(1) x 和 y 的關係式。

(2) 兩數相乘的最小值為多少？

5. 已知有兩個數字的和為 20，假設兩數的其中一數為 x 、兩數相乘為 y 。

請問：

(1) x 和 y 的關係式。

(2) 兩數相乘的最大值為多少？

重點提問

1. 根據上面的課文，這些題目有哪些題目的目標是在求最大值？

哪些題目的目標是在求最小值？

2. 試著出一題與二次函數有關的應用問題。