單元三　分析二次函數圖形

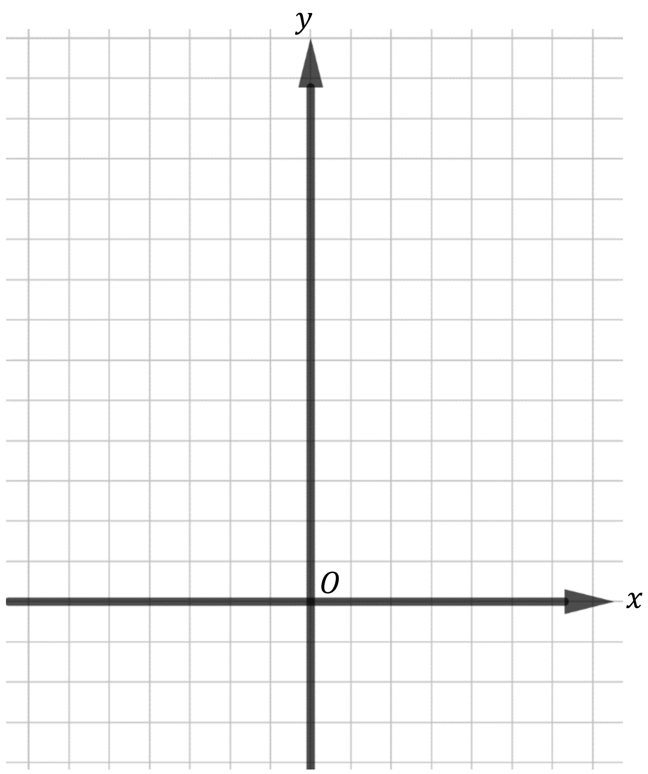
課文A：　配方法與二次函數圖形

從單元二中，知道了「$y=a(x-h)^2+k$」形式的二次函數圖形，也能夠從這種形式知道二次函數圖形的開口方向、頂點跟對稱軸。

「$y=ax^2+bx+c$」形式的二次函數如何找出它的開口方向、頂點跟對稱軸呢？

請利用前面的方法，試著畫出 $y=x^2-8x+14$ 的圖形，並找出此函數圖形的開口方向、頂點及對稱軸。

x			
y			



是不是發現很難準確地找到頂點及對稱軸呢？

我們前面學過了「$y=a(x-h)^2+k$」形式的二次函數圖形，也能夠從「$y=a(x-h)^2+k$」找出的開口方向、頂點及對稱軸，所以遇到任何的二次函數時，可以把形式轉換成「$y=a(x-h)^2+k$」。舉個例子好了，前面畫過 $y=x^2-8x+14$，我們將它轉化「$y=a(x-h)^2+k$」這種形式看看！

仔細看一下「$y=a(x-h)^2+k$」，等號右邊是一個跟 x 有關的完全平方加上一個數字，所以需要想辦法湊出與 x 有關的完全平方。

也就是要想辦法配出完全平方式來，要配成完全平方式需要集滿「$\square^2-2\times\square\times\triangle+\triangle^2$」才可以換成 $(\square-\triangle)^2$ 。

嘗試處理 x^2-8x ，把 x^2 當成 $\square^2$，就是把 x 當成 $\square$；那 $8x$ 就當成是 $2\times\square\times\triangle$，想一下 $8x=2\cdot x\cdot$ __?__ ，$8x=2\cdot x\cdot 4$，也就是說把 4 當成 $\triangle$。

有 $\square^2$、$2\times\square\times\triangle$，還缺少 $\triangle^2$，先加上 $\triangle^2$ 就集滿「$\square^2-2\times\square\times\triangle+\triangle^2$」。也就是 x^2-8x 再加 4^2，就可以配成完全平方了。但是一個函數不能隨便加一個數字，於是為了保持與原本函數一樣，所以同時要再減 4^2。整個過程如下：

$$y=x^2-8x+14$$
$$y=x^2-2\cdot 4\cdot x+14$$
$$y=x^2-2\cdot 4\cdot x+4^2-4^2+14$$
$$y=(x-4)^2-16+14$$
$$y=(x-4)^2-2$$

$y=x^2-8x+14$ 這個二次函數就是可以化成 $y=(x-4)^2-2$，也就是這個函數圖形就是由 $y=x^2$ 平移得到的，

函數圖形的開口方向向上、頂點 $(4,-2)$、對稱軸 $x=4$。

這個將「$y = ax^2 + bx + c$」配成「$y = a(x-h)^2 + k$」的方法就稱為配方法，下面幾題將二次函數化成「$y = a(x-h)^2 + k$」的形式並求此圖形的開口方向、頂點及對稱軸。

例題一：將二次函數 $y = x^2 - 6x + 5$ 化成 $y = a(x-h)^2 + k$ 的形式，並畫出函數圖形，且求此圖形的開口方向、頂點及對稱軸。

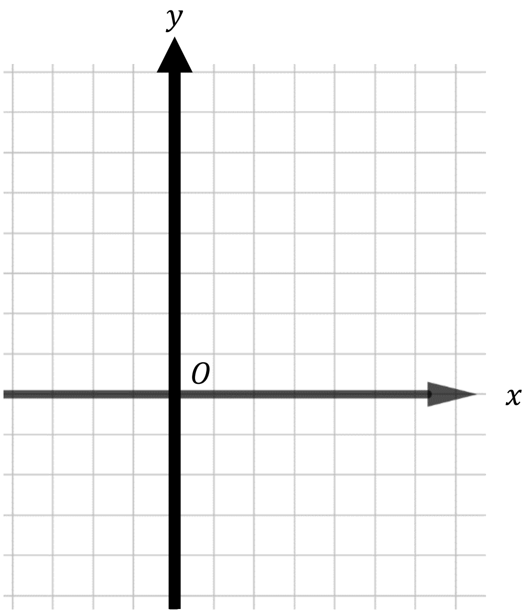
$\boxed{解}$：$y = x^2 - 6x + 5$

$y = x^2 - 2\cdot\underline{\qquad}\cdot x + 5$

$y = x^2 - 2\cdot\underline{\qquad}\cdot x\ \underline{+\qquad\qquad}\ \underline{-\qquad\qquad} + 5$

$y = (x\ \underline{-\qquad\qquad})^2\ \underline{-\qquad\qquad} + 5$

$y = (x\underline{\qquad\qquad})^2\underline{\qquad\qquad}$



答：$y = (x-3)^2 - 4$，開口方向向上、頂點 $(3,-4)$、對稱軸 $x = 3$。

例題二：將二次函數 $y=x^2+10x+25$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，並畫出函數圖形，且求此圖形的開口方向、頂點及對稱軸。

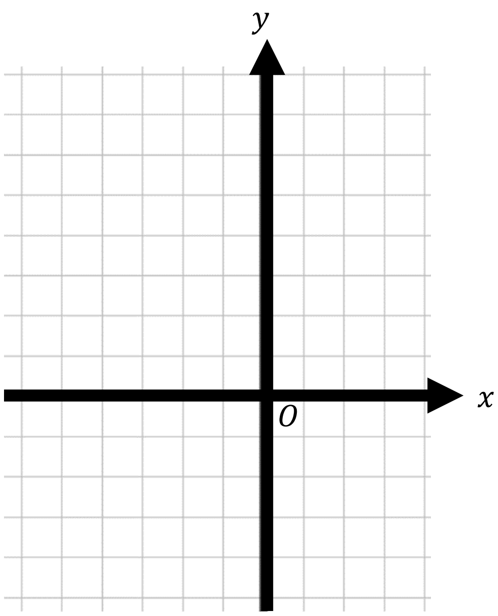
$\boxed{解}$：$y=x^2+10x+25$

$y=x^2+2\cdot\_\_\_\_\cdot x+25$

$y=x^2+2\cdot\_\_\_\_\cdot x+\_\_\_\_\_\_-\_\_\_\_\_\_+25$

$y=(x+\_\_\_\_\_\_)^2-\_\_\_\_\_\_+25$

$y=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$



答：$y=(x+5)^2$，開口方向向上、頂點 $(-5,0)$、對稱軸 $x=-5$。

前面都是利用配方法處理 x^2 項係數為 1 的二次函數，接下來要來看一些 x^2 項係數不為 1 的二次函數！

舉個例子，試著將 $y=2x^2-16x+28$，轉化「$y=a(x-h)^2+k$」的形式，並畫出函數圖形，且求此圖形的開口方向、頂點及對稱軸。

在二次函數 $y=2x^2-16x+28$ 中，先嘗試處理 $2x^2-16x$，要變成「$a(x-h)^2$」，所以可以先將 2 提出來，$2x^2-16x=2(x^2-8x)$。

x^2-8x 要配成「$(x-h)^2$」，把 x^2 當成 $\square^2$，就是把 x 當成 $\square$；那 $8x$ 就當成是 $2\square\times\triangle$，想一下 $8x=2\cdot x\cdot$ ___?___ ，$8x=2\cdot x\cdot 4$，也就是說把 4 當成 $\triangle$。

有 $\square^2$、$2\square\times\triangle$，還缺少 $\triangle^2$，先加上 $\triangle^2$ 就集滿「$\square^2-2\square\times\triangle+\triangle^2$」。也就是 x^2-8x 再加 4^2，就可以配成完全平方了。但是一個函數不能隨便加一個數字，於是為了保持與原本函數一樣，所以同時要再減 4^2。所以 $x^2-8x=x^2-8x+4^2-4^2=(x-4)^2-16$。

最後再整理成「$y=a(x-h)^2+k$」！整個過程如下：

$$y=2x^2-16x+28$$
$$y=2(x^2-8x)+28$$
$$y=2(x^2-2\cdot 4\cdot x+4^2-4^2)+28$$
$$y=2[\ (x-4)^2\quad-16]+28$$
$$y=\ 2(x-4)^2\quad-32\ +28$$
$$y=\ 2(x-4)^2\ \ -4$$

$y=2x^2-16x+28$ 可以化成 $y=2(x-4)^2-4$ ，也就是這個函數圖形就是由 $y=2x^2$ 平移得到的，函數圖形的開口方向向上、頂點 $(4,-4)$、對稱軸 $x=4$。

下面幾題同樣利用配方法來將二次函數化成「$y=a(x-h)^2+k$」的形式並求此圖形的開口方向、頂點及對稱軸。

例題三：將二次函數 $y = 3x^2 - 6x + 10$ 化成 $y = a(x-h)^2 + k$ 的形式，並畫出函數圖形，且求此圖形的開口方向、頂點及對稱軸。

$\boxed{\text{解}}$：$y = 3x^2 - 6x + 10$

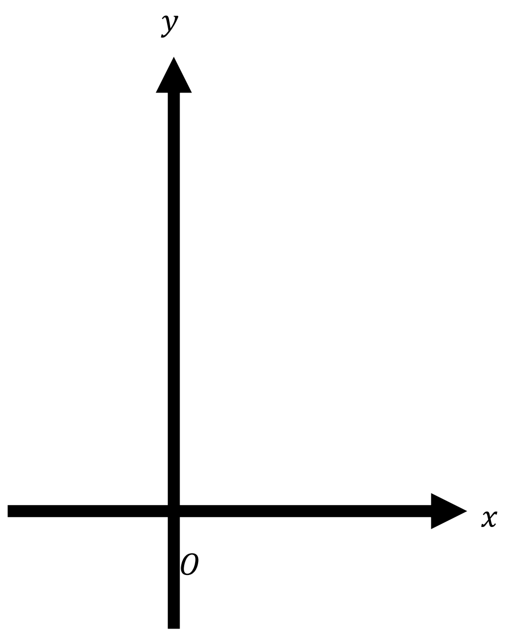
$y = \_\_\_(x^2 \underline{\ - \qquad\quad}) + 10$

$y = \_\_\_(\ x^2 \underline{\ - \qquad\quad} \underline{+ \qquad\quad} \underline{- \qquad\quad}) + 10$

$y = \_\_\_[\ (x \underline{\ - \qquad\qquad})^2 \ \underline{- \qquad\quad}] + 10$

$y = \_\_\_(x \underline{\ - \qquad\qquad})^2 \ \underline{- \qquad\quad} + 10$

$y = \_\_\_(x \underline{\qquad\qquad})^2 \underline{\qquad\qquad}$



答：$y = 3(x-1)^2 + 7$，開口方向向上、頂點 $(1,7)$、對稱軸 $x = 1$。

例題四：將二次函數 $y=-x^2-6x-9$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，並畫出函數圖形，且求此圖形的開口方向、頂點及對稱軸。

原本函數中的x^2項係數為「-1」，將 -1 提出來，所以記得要變號！

$\boxed{解}$：$y=-x^2-6x-9$

$y=\underline{\ -\ }(x^2+\underline{\qquad\qquad})-9$

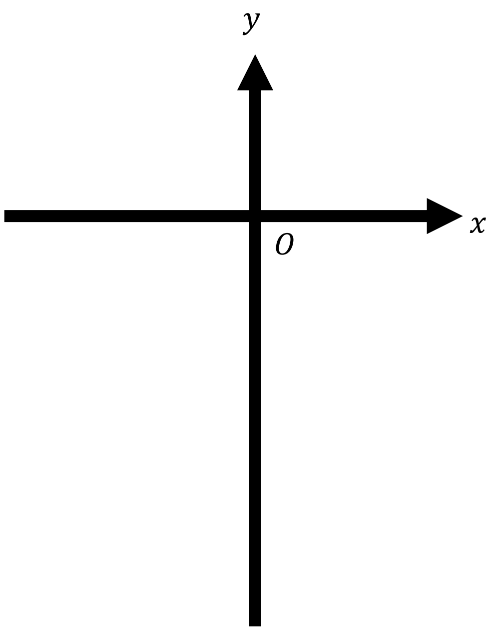
$y=\underline{\ -\ }(\ x^2\ +\underline{\qquad\qquad}+\underline{\qquad\qquad}-\underline{\qquad\qquad})-9$

$y=\underline{\ -\ }[\ (x\ +\underline{\qquad\qquad})^2\ -\underline{\qquad\qquad}]-9$

$y=\underline{\ -\ }(x\ +\underline{\qquad\qquad})^2+\underline{\qquad\qquad}-9$

$y=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

前面共同乘以 -1，所以記得要變號！



答：$y=-(x+3)^2$，開口方向向下、頂點 $(-3,0)$、對稱軸 $x=-3$。

•隨堂練習：

1.求出下列二次函數圖形的開口方向、頂點及對稱軸，並比較其開口大小：

甲：$y=-3(x-2)^2-4$

乙：$y=x^2+6x+10$

丙：$y=2x^2+4x+5$

丁：$y=-x^2+4x-7$

重點提問

1.根據上面的課文，請用自己的話解釋一下什麼是二次函數的「配方法」。

2.根據上面的課文，請說明「利用配方法將 $y = ax^2 + bx + c$ 配成 $y = a(x-h)^2 + k$」有什麼好處？

3.將一個二次函數進行配方法時，需要特別注意哪些事情？