目　錄

單元一　證明與推理

課文A：　幾何證明

我們曾經學過一些數學定義、性質或定理，也會利用這些的定義、性質或定理進行推論，而這個推論的過程稱為證明。

在幾何題的推理證明中，常常會用一些幾何性質，詳見 70 頁附錄。

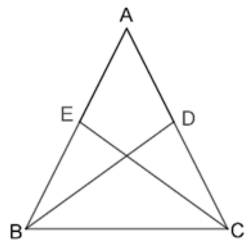
※幾何證明

數學的證明是藉由已知條件及隱藏條件、透過某些性質、進行推論、得到結論，從題目到寫出證明，可寫成已知、求證、證明的形式，其中完整的證明過程應包含已知、推論、結論，舉例說明如下：

如圖，$\triangle ABC$ 中，已知$\overline{AB}=\overline{AC}$，

D點在 $\overline{AC}$ 上、E點在 $\overline{AB}$ 上，而且 $\overline{AD}=\overline{AE}$，

求證$\overline{BD}=\overline{CE}$。



證明

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

因為 $\overline{AB}=\overline{AC}$ (已知)

$\overline{AD}=\overline{AE}$ (已知)

已知條件

$\angle A=\angle A$ (公用角)

隱藏條件

所以 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS 全等)

所根據的性質

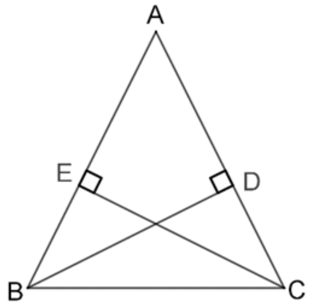
故$\overline{BD}=\overline{CE}$ (對應邊相等)

結論

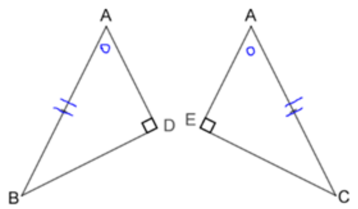
例題一：如圖，△ABC 為等腰三角形，

已知 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}\perp\overline{AC}$、$\overline{CE}\perp\overline{AB}$，

求證(1)△ABD ≅△ACE　　(2) $\overline{BD}=\overline{CE}$。



◎解題思維(1)：

已知條件(配合下圖的邊角標示) 已知 $\overline{\boldsymbol{AB}}=\overline{\boldsymbol{AC}}$，$\overline{\boldsymbol{BD}}\perp\overline{\boldsymbol{AC}}$、$\overline{\boldsymbol{CE}}\perp\overline{\boldsymbol{AB}}$		求證(結論) **△ABD ≅△ACE**
	隱藏條件：「∠**A** ＝∠**A** (公用角)」。 引用性質:AAS 全等判別性質	

根據上面的解題思維，寫出第(1)小題完整的證明過程：

$\boxed{\text{證明(1)}}$：

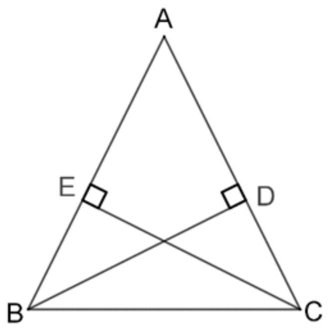
在△ABD和△ACE中，

因為∠ADB ＝ ∠AEC ＝ 90°，

∠A ＝∠A (公用角)

又 ____________________

所以 △ABD ≅△ACE (AAS 全等)



$\boxed{\text{證明(2)}}$：

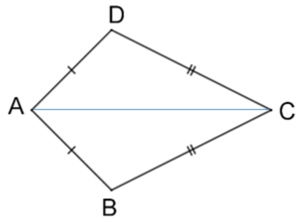
由(1)△ABD ≅△ACE (AAS 全等)，可得$\overline{BD}=\overline{CE}$ (對應邊相等)

※「標看用」策略

從前一題的經驗中，我們知道在確認△ABD 與△ACE是否全等的過程中，常需要將長度相等的邊，標上相同的記號、度數相等的角，標上相同的記號；將已知的邊長標上長度數據、已知的角度標上度數數據。這些標示的符號，能協助我們看出關鍵的局部圖形，並據以引用正確的幾何性質，當想要讀懂別人的證明時，也常需要依據證明過程搭配這些標示策略。請同學在以下的學習過程中記得適時地使用標示記號這個策略。

例題二：如圖，已知$\overline{AD}=\overline{AB}$，$\overline{DC}=\overline{BC}$，

求證 $\angle D=\angle B$。



◎**解題思維：**

已知條件(配合下圖的邊角標示)		求證(結論)
已知 $\overline{\mathbf{AD}}=\overline{\mathbf{AB}}$，$\overline{\mathbf{DC}}=\overline{\mathbf{BC}}$ 想要證明 $\angle\mathbf{D}=\angle\mathbf{B}$，可以先找出分別以$\angle\mathbf{D}$、$\angle\mathbf{B}$為一角的兩個三角形， 證明這兩個三角形全等。	→	$\angle\mathbf{D}=\angle\mathbf{B}$
如果可以證明「$\triangle\mathbf{ADC}\cong\triangle\mathbf{ABC}$」		

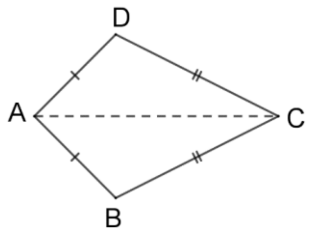
請根據剛剛的解題思維，完成下面的填空，整理成完整的證明過程：

證明：作一輔助線 $\overline{AC}$，

因為$\overline{AD}=\overline{AB}$，$\overline{DC}=\overline{BC}$(已知)

又 ________________

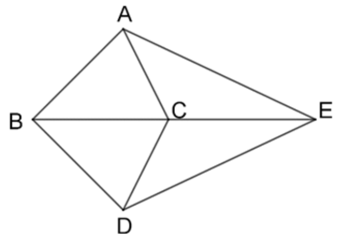
所以$\triangle ADC\cong\triangle ABC$(SSS 全等)，故$\angle D=\angle B$



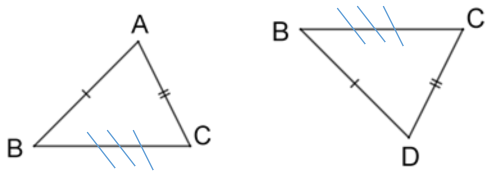
例題三：如圖，已知$\overline{BA}=\overline{BD}$，$\overline{CA}=\overline{CD}$，

E 為$\overleftrightarrow{BC}$上一點，求證：

(1)$\angle CBA=\angle CBD$。 (2)$\overline{AE}=\overline{DE}$。



◎解題思維(1)：



由上圖，可得$\triangle CBA\cong\triangle CBD$，因此 $\angle CBA=\angle CBD$

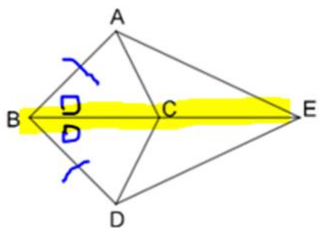
請根據解題思維，重新整理寫成完整的證明過程：

$\boxed{\text{證明(1)}}$：因為$\overline{BA}=\overline{BD}$，$\overline{CA}=\overline{CD}$，又____________________

所以$\triangle CBA\cong\triangle CBD$(SSS 全等)

得到$\angle CBA=\angle CBD$

◎解題思維(2)：



由上圖，可得$\triangle BAE\cong\triangle BDE$ (SAS 全等)，因此$\overline{AE}=\overline{DE}$

請根據解題思維，重新整理寫成完整的證明過程：

$\boxed{\text{證明(2)}}$：因為$\overline{BA}=\overline{BD}$，$\angle CBA=\angle CBD$ ，又____________________

所以$\triangle BAE\cong\triangle BDE$ (SAS 全等)

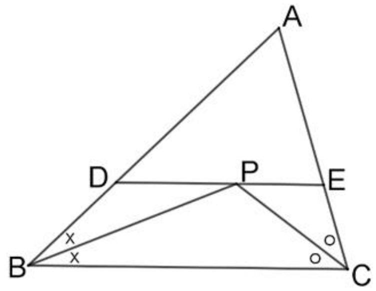
得到$\overline{AE}=\overline{DE}$

例題四：如圖，已知$\overline{\mathrm{BP}}$、$\overline{\mathrm{CP}}$ 分別為

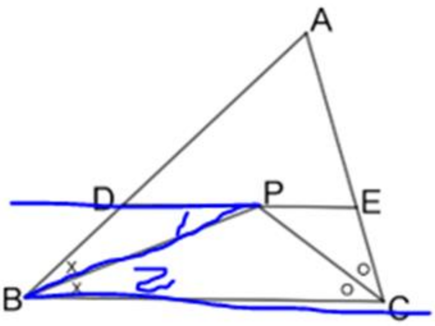
∠ABC、∠ACB 之角平分線，

$\overline{\mathrm{DE}}$ 過 P 且與 $\overline{\mathrm{BC}}$平行，求證：

(1)$\overline{DP}=\overline{DB}$。 (2)$\overline{EP}=\overline{EC}$。



◎解題思維：



由上圖，∠1與∠2這組內錯角會相等嗎?

$\boxed{\text{證明}}$：因為 $\overline{\mathrm{DP}}//\overline{\mathrm{BC}}$，$\overline{PB}$ 為截線，所以內錯角 ∠1 = ∠2。

又∠DBP = ∠2，所以∠DBP = ∠1

故 $\triangle DPB$ 為等腰三角形，得到 $\overline{DP}=\overline{DB}$

同理$\overline{EP}=\overline{EC}$。

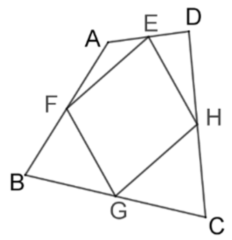
請同學模仿第(1)小題的證明，自行完成。

$\boxed{\text{證明}}$：

例題五：如圖，四邊形ABCD 中，已知E、F 分別為 $\overline{AD}$、$\overline{AB}$ 的中點，G、H 分別為 $\overline{CB}$、$\overline{CD}$ 中點，求證：

(1)四邊形EFGH 為平行四邊形。

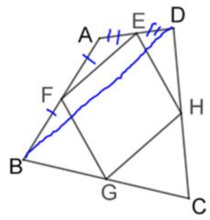
(2)四邊形EFGH 周長= $\overline{BD}+\overline{AC}$。



◎**解題思維**：使用「標看用」的策略

$\boxed{\text{證明}}$：由右圖，在△ABD 中，E為$\overline{AD}$的中點、F為$\overline{AB}$的中點，由「三角形兩邊中點的連線性質」得知「$\overline{EF}//\overline{BD}$ 而且 $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{BD}$」

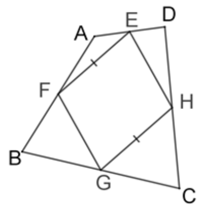
同理$\overline{GH}//\overline{BD}$ 而且 $\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$」



由上面可以得知 $\overline{FE}$ 和 $\overline{GH}$ 的關係：

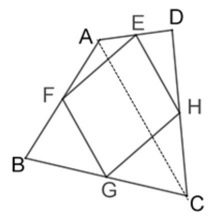
$\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\overline{GH}$，$\overline{EF}//\overline{BD}//\overline{GH}$，

故 四邊形EFGH 為平行四邊形(一雙對邊平行且相等)。



同理，

連接 $\overline{AC}$，有兩三角形 △BAC、△DAC：F為$\overline{BA}$的中點、G為$\overline{BC}$的中點、E為$\overline{DA}$的中點、H為$\overline{DC}$的中點，由「三角形兩邊中點的連線性質」得知「$\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{AC}$、$\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{AC}$」。



由上面可以得知：

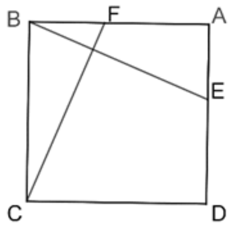
$\overline{EF}=\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$、$\overline{FG}=\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{AC}$，

故四邊形EFGH 周長= $\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{FG}+\overline{EH}$

$$=\frac{1}{2}\overline{BD}+\frac{1}{2}\overline{BD}+\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{AC}=\overline{BD}+\overline{AC}$$

重點提問

1.如右圖，正方形ABCD 中，已知$\overline{AE} = \overline{BF}$。

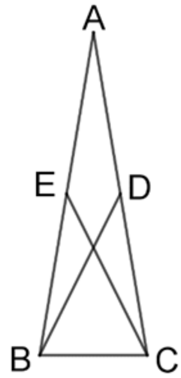


(1)求證$\overline{BE} = \overline{CF}$。

(2)將求證(1) $\overline{BE} = \overline{CF}$，所寫的完整證明中，分別標示「已知條件」、「隱藏條件」、「證明所用的性質」、「推論過程」、「結論」。

2.如圖，△ABC 為等腰三角形，已知 $\overline{AB} = \overline{AC}$，

$\overline{BD}$、$\overline{CE}$ 為 △ABC的兩條中線，求證 $\overline{BD} = \overline{CE}$。



(1)請列出這題當中的已知條件。

(2)請列出這題當中要求證的結論。

(3)請分別找出以 $\overline{BD}$、$\overline{CE}$ 為一邊的三角形。

(4)請從(3)所找出的三角形中猜想其中哪兩個三角形會全等。

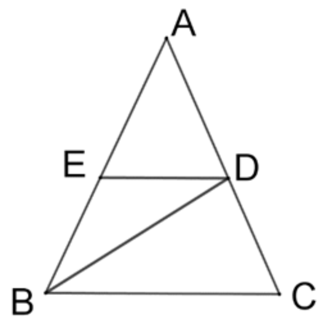
(5)請根據(1)所列出的條件證明(5)所猜想的兩個三角形會全等。

(6)根據(1)~(5)的過程整理出完整的證明過程。

• **隨堂練習：**

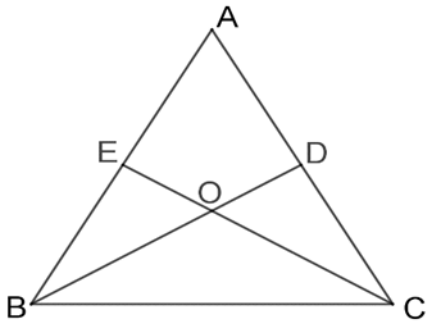
1.如圖，已知$\overline{BD}$為$\angle B$之角平分線，

$\overline{DE}$平行於$\overline{BC}$，求證$\overline{DE}=\overline{BE}$。



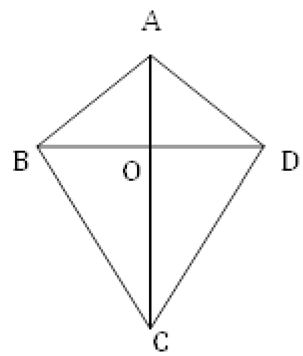
2.如圖，$\triangle ABC$為等腰三角形，已知$\overline{AB}=\overline{AC}$，

$\overline{BD}$、$\overline{CE}$為$\triangle ABC$的兩條角平分線，求證$\overline{BD}=\overline{CE}$。



3.如圖，已知$\overline{AB}=\overline{AD}$、$\overline{DC}=\overline{BC}$、$\overline{BD}$與$\overline{AC}$交於O點，

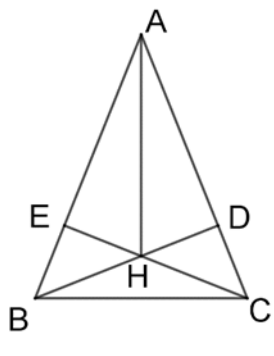
求證$\angle AOB=\angle AOD$且$\overline{BO}=\overline{DO}$。



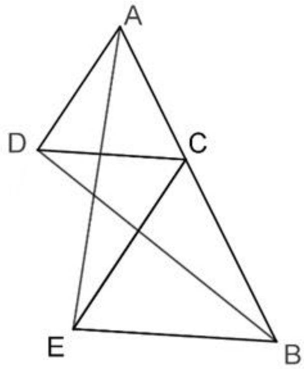
4.如圖，$\triangle ABC$為等腰三角形，已知$\overline{AB}=\overline{AC}$，

$\overline{BD}\perp\overline{AC}$、$\overline{CE}\perp\overline{AB}$、$\overline{BD}$與$\overline{CE}$交於H點，

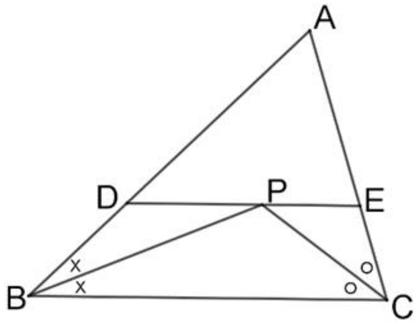
求證$\angle DHA=\angle EHA$。



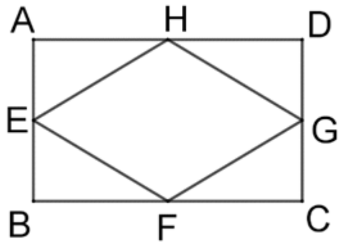
5.如圖，已知 C 為 $\overline{AB}$ 上的一點，分別以 $\overline{\mathrm{AC}}$、$\overline{\mathrm{CB}}$ 向同側作正△ACD 與正△CBE，求證 $\overline{AE}=\overline{DB}$。



6.如圖，已知$\overline{\mathrm{BP}}$、$\overline{\mathrm{CP}}$分別為∠B、∠C 之角平分線，$\overline{\mathrm{DE}}$ 過 P 且平行於 $\overline{\mathrm{BC}}$，若 $\overline{AB}=7$、$\overline{AC}=6$，求△ADE 的周長？



7.如圖，長方形ABCD 中，已知E、F 分別為 $\overline{AD}$、$\overline{AB}$ 的中點，G、H 分別為 $\overline{CB}$、$\overline{CD}$ 中點，求證四邊形EFGH 為菱形。



課文B：　代數證明

在數學的證明推理當中，除了幾何的證明推理以外，也有一些屬於代數的推理，例如我們學過的乘法公式、一元二次方程式的公式解、……等，接下來我們就要來學習一些代數證明的方法！

※偶數、奇數的表示方式

在學習代數證明的方法之前，我們先來討論一些相關的假設方式！

1.偶數：以前我們學過「當一個整數可以被 2 整除，這個整數就是一個偶數」，也就是說只要是 2 的倍數都會是偶數。

例如，$16 = 2 \times 8$ ，16 會是偶數；

$34 = 2 \times 17$，34 也是偶數。

總而言之，偶數都可以表示成 $2n$(其中n為整數)。

2.奇數：「當一個整數不可以被 2 整除，也就是被 2 除餘 1，這個整數就是一個奇數」，也就是說只要是被 2 除餘 1 的整數都會是奇數。

例如，$29 = 2 \times 14 + 1$，29 會是奇數；

$33 = 2 \times 16 + 1$，33 也是奇數。

總而言之，奇數都可以表示成 $2n + 1$ (其中n為整數) 的形式。

※代數證明

與幾何的證明一樣，完整的證明過程應包含已知、推論、結論，舉例說明如下：

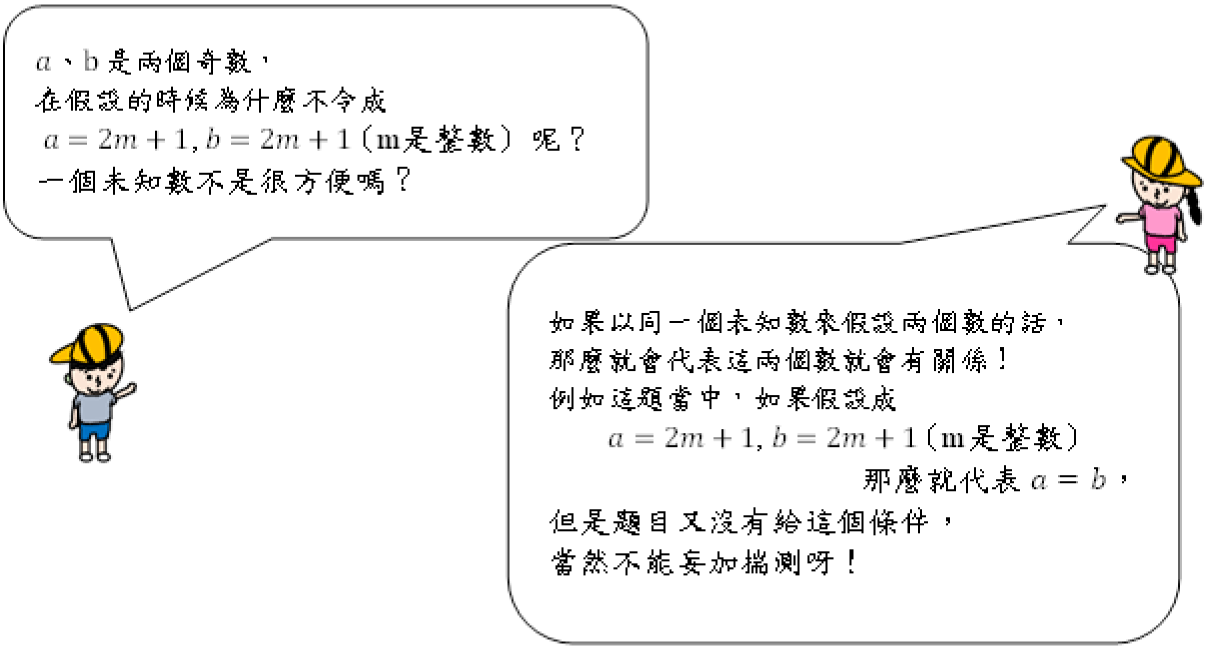
已知 a、b 是兩個奇數，求證 $a+b$ 會是偶數。

$\boxed{\text{證明}}$：因為 a、b 是兩個奇數，

所以令 $a=2m+1, b=2n+1$ (m、n 皆是整數)

$$\begin{aligned} a+b &= (2m+1)+(2n+1) \\ &= 2m+1+2n+1 \\ &= 2m+2n+2 \\ &= 2(m+n+1) \end{aligned}$$

故 $a+b$ 為偶數 ($m+n+1$ 是整數)



例題一：已知：a 是一個奇數，求證：a^2 也是奇數。

◎解題思維：

想要證明 a^2 是奇數，

就是最後要將 a^2 化成「$2\times(\quad)+1$」的樣子。

證明：

因為 a 是一個任意奇數，所以可以令 $a=2n+1$，n 是整數。

$a^2=(2n+1)^2=(2n)^2+2\times 2n\times 1+1^2$

$=4n^2+4n+1$

(提出公因數 2)

$=2\times(2n^2+2n)+1$

n 是整數，所以 $2n^2+2n$ 是整數，

故 $2\times(2n^2+2n)+1$ 是奇數，也就是 a^2 是奇數。

例題二：已知：a、b 為正整數，且 $a=2b$，求證：a^2+b^2 是 5 的倍數。

◎解題思維：

想要證明a^2+b^2 是 5 的倍數，

就是最後要將 a^2+b^2 化成「$5\times(\quad)$」的樣子。

證明：

$a^2+b^2=(2b)^2+b^2=4b^2+b^2=5b^2$

b 是正整數，所以 b^2 也會是正整數，

故 a^2+b^2 是 5 的倍數。

例題三：已知：在直角三角形中，c 為斜邊長，a、b 為兩股邊長，而且 a、b、c 均為正整數。求證：a^2 是 $(c+b)$ 的倍數。

◎解題思維：

想要證明a^2 是 $(c+b)$ 的倍數，

就是最後要將 a^2 化成「$(c+b)\times(\quad)$」的樣子。

$\boxed{\text{證明}}$：在直角三角形中，c 為斜邊長，a、b 為兩股邊長，

根據畢氏定理可以列出 a、b、c 的關係式：$a^2+b^2=c^2$

想知道的是 a^2，所以將 b^2 移項⟹ $a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$

c、b 都是正整數，所以 $(c-b)$ 也會是整數，

故 a^2 是 $(c+b)$ 的倍數。

例題四：已知：a、b 為正數，且 $a>b$，求證：$a^2>b^2$。

◎解題思維：

想要證明$a^2>b^2$，可以先想辦法得到 $a^2-b^2>0$，

再經過移項就可以得到「$a^2>b^2$」。

分析一下 a^2-b^2 ，利用乘法公式可得 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。

$\boxed{\text{證明}}$：因為 a、b 為正數，所以 $a+b>0$；

而 $a>b$，移項後可得到 $a-b>0$。

因此 $(a+b)(a-b)>0$

$$a^2-b^2>0$$

$$a^2>b^2$$

重點提問

1. 根據上面的課文，請將下面各題利用代數的形式來表示：

(1)偶數：________。(2) 奇數：________。(3) 5 的倍數：________。

(4) 9 的倍數：________。(5) a 為正整數，a 的倍數：________。

(6) b、c 為正整數，$(b+c)$ 的倍數：____________。

2. a 是偶數、b 是奇數，請判斷以下選項分別為偶數還是奇數，並加以解釋。

(1) $a+b$　　(2) $3a$

(3) $5b$　　(4) $3a+2b$

3. $a^2=(12b+4)^2-2^2$，其中 b 為正整數，

請在以下選項當中找出 a^2 的因數，並解釋原因。

(1) 3　　(2) 4　　(3) 5

(4) $(2b+1)$　　(5) $(3b+1)$

• 隨堂練習：

1.已知：a 是奇數、b 是偶數，求證：$a \times \mathrm{b}$ 必是偶數。

2.已知：a 是一個任意偶數，求證：a^2 必是偶數。

3.已知：a、b 是相鄰的整數，求證：$a^2 - \mathrm{b}^2$ 必是奇數。

4.已知：$a + 3^2 = (3b + 3)^2$，其中 b 為正整數，求證：a 必是 9 的倍數。

5.已知：a、b 為正數，且 $a > b$，求證：$(a - \mathrm{b})(\mathrm{b} - a) < 0$。