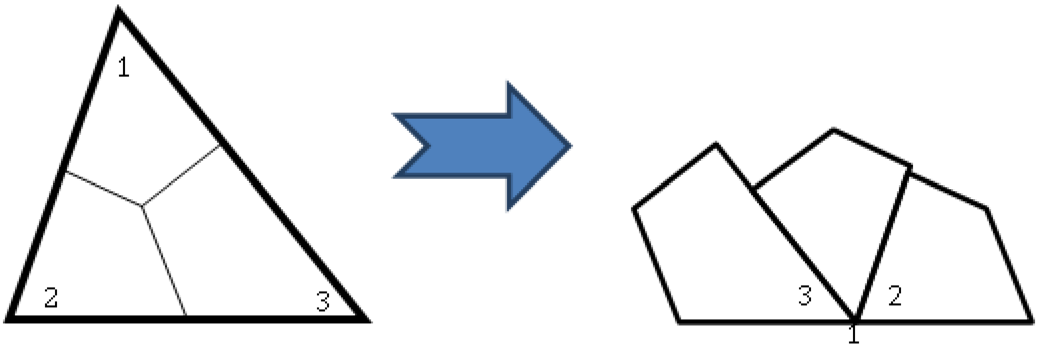
單元一　內角與外角

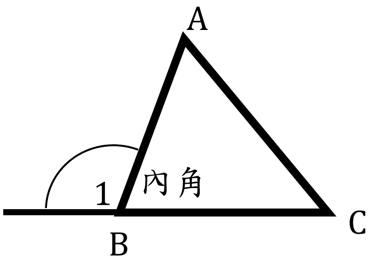
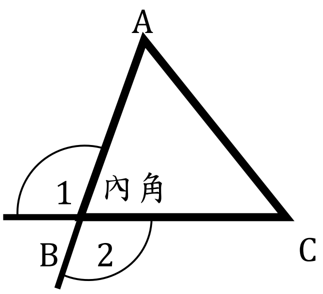
課文A：　三角形的內角和、外角和

在國小的時候曾經將一個三角形做分割，分割後再做拼補，從這個實驗會發現三角形的三個內角和為 180°。如下圖：



$\angle 1$ 、$\angle 2$ 、$\angle 3$ 分別就是三角形的三個內角，$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$！

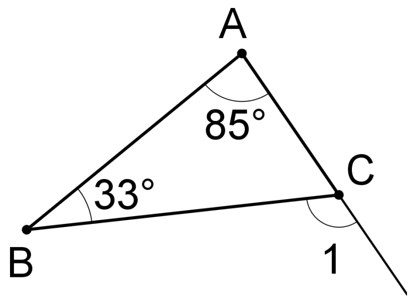
三角形除了有內角以外，還有一種角的名字稱為「外角」！

	如圖，將$\angle B$ 其中的一邊$\overline{CB}$往頂 B 延長，會有兩個角，裡面的角就是內角，而內角旁邊還有一個$\angle 1$，且$\angle 1$ 與$\angle B$ 互補，我們就稱$\angle 1$ 為$\angle B$ 的「外角」。
	如果$\overline{AB}$往頂點 B 延長的話呢？同樣會有一$\angle 2$ 與內角$\angle B$ 互補，$\angle 2$ 也是$\angle B$ 的「外角」。因為$\angle 1$ 與$\angle 2$ 是互為對頂角，所以這兩個角其實會一樣大，我們在討論外角時只要取其中一個做代表即可。

例題一：$\triangle ABC$ 中，$\angle A=85^\circ$，$\angle B=33^\circ$，求 $\angle C$ 的外角度數為何？

◎解題思維：

首先，面對幾何題時我們盡量將符合題意的圖形畫出來，接下來根據題目的條件標在圖上。



$\boxed{解}$：根據三角形內角和=180°，可以列出下列式子：

$85^\circ+33^\circ+\angle C=180^\circ$

$\angle C=180^\circ-85^\circ-33^\circ=62^\circ$

$\angle C+\angle 1=180^\circ$

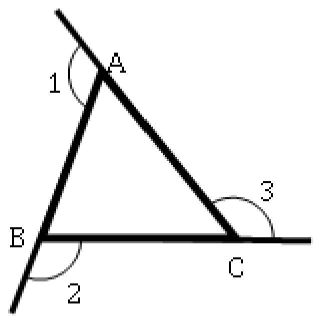
$\angle C$ 外角=$\angle 1=180^\circ-62^\circ=118^\circ$

事實上，三角形當中有三個內角，如果將其中一角的一邊延伸，都可以得到其對應的外角，而且外角與內角會互補。如下圖，在$\triangle ABC$ 中，

$\angle 1$ 是$\angle CAB$ 的一外角，所以$\angle 1+\angle CAB=180^\circ$；

$\angle 2$ 是$\angle ABC$ 的一外角，所以$\angle 2+\angle ABC=180^\circ$；

$\angle 3$ 是$\angle$BCA 的一外角，所以$\angle 3+\angle BCA=180^\circ$。



因此$(\angle 1+\angle CAB)+(\angle 2+\angle ABC)+(\angle 3+\angle BCA)=3\times 180^\circ=540^\circ$

又因為$\angle CAB$、$\angle ABC$、$\angle BCA$ 為$\triangle ABC$ 中的三個內角，三個內角

和 $\angle CAB+\angle ABC+\angle BCA=180^\circ$。

所以三個外角和 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=540^\circ-180^\circ=360^\circ$。

三角形的外角和定理：任意三角形的一組外角和為 360°。

三角形的內角和：任意三角形的內角和為 180°。

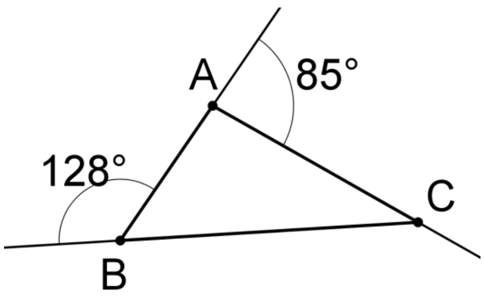
如果不懂的可以掃掃看旁邊的 QR code！

例題二：$\triangle ABC$ 中，$\angle$A 的外角是 85°，$\angle$B 的外角是 128°，求 $\angle$C 的度數為何？

◎解題思維：

畫出符合題意的圖形，再標上題目的條件。

如圖：



$\boxed{解}$：

根據三角形外角和 $=360^\circ$，可以列出式子：

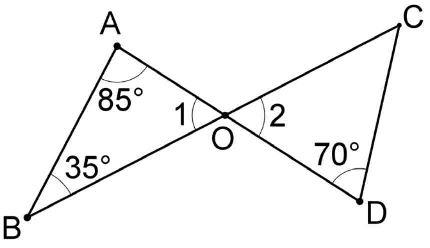
$85^\circ+128^\circ+\angle C$ 外角 $=360^\circ$

$\angle C$ 外角 $=360^\circ-85^\circ-128^\circ=147^\circ$

$\angle C+\angle C$ 外角 $=180^\circ$

$\angle C=180^\circ-147^\circ=33^\circ$

例題三：如下圖，$\overline{AD}$與$\overline{BC}$交於 O 點，$\angle A=85°$，$\angle B=35°$，$\angle D=70°$，求$\angle 1=$？$\angle 2=$？$\angle C=$？



◎**解題思維：**

利用三角形的內角和=180°，且$\overline{AD}$與$\overline{BC}$皆為直線，即$\angle 1$與$\angle 2$是對頂角，角度相等。

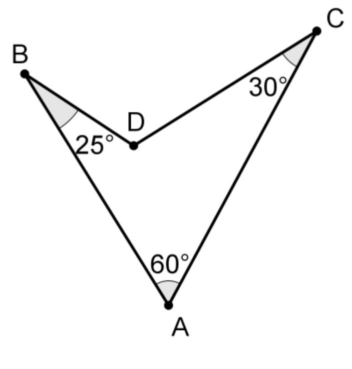
$\boxed{解}$：在$\triangle CDO$ 中，三角形的內角和=180°，可以列出下列式子：

$\angle 1=180°-85°-35°=60°$

又$\angle 2=\angle 1=60°$

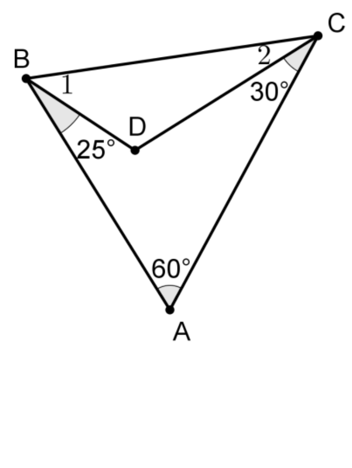
則$\angle C=180°-70°-60°=50°$

例題三：如右圖，$\angle A=60°$，$\angle ABD=25°$，$\angle DCA=30°$，求$\angle CDB=$？



◎**解題思維：**

如果連接$\overline{BC}$：就會出現兩個三角形$\triangle ABC$和$\triangle DBC$。



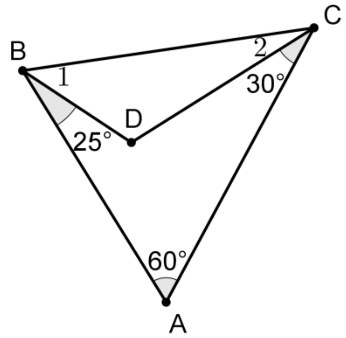
解：連接 $\overline{BC}$，△BCD 中，可知∠D=180°－(∠1+∠2)

△ABC 中，∠A+∠1+∠ABD+∠2+∠DCA=180°

(三角形內角和為 180°)

所以∠1+∠2=180°－60°-25°-30°=65°

則∠D=180°－(∠1+∠2)=180°－65°=115°



重點提問

1.請畫出一三角形△ABC ，並標示出此三角形的所有內角。

而此三角形的內角和會是多少？

2.根據上面的課文，請用自己的話解釋什麼是三角形的外角，並在提問一所畫出來的△ABC 上標示出此三角形的一組外角。

而此三角形的一組外角和會是多少？

3.承上題，請利用提問一所畫三角形的內角和，推論出該三角形的一組外角和。

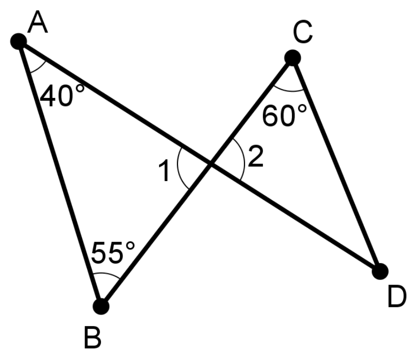
• **隨堂練習：**

1.$\triangle ABC$ 中，$\angle A=45^{\circ}$，$\angle B=30^{\circ}$，求$\angle C$ 的度數為何？

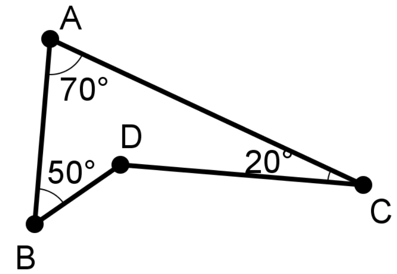
2.$\triangle ABC$ 中，$\angle A=103^{\circ}$，$\angle \mathrm{B}=47^{\circ}$，求$\angle \mathrm{C}$ 的外角度數為何？

3.$\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的外角是 150°，$\angle B$ 的外角是 120°，求$\angle C$ 的度數為何？

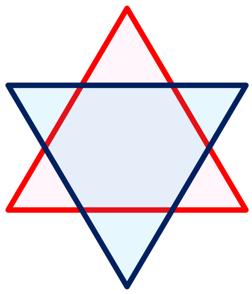
4. 如圖，$\overline{AD}$與$\overline{BC}$ 交於 O 點，$\angle A=40°$，$\angle B=55°$，$\angle C=60°$，求$\angle 1=$？
$\angle 2=$？$\angle D=$？



5.如圖，∠A=70°，∠B=50°，∠C=20°，求∠CDB=？



6.右圖是以色列的國旗，中間的符號是代表是猶太教和猶太文化的六芒星(又名大衛星、所羅門封印)，在西方的傳說中具有神秘的力量。小明覺得非常的漂亮，也在紙上畫出了一個六芒星形，如下圖，請問下圖中的 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=$？

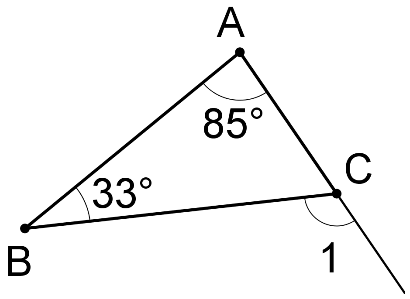


還是不太懂，請看下面影片

課文	例題一~三
https://youtu.be/KJZJ9fqckHA	https://youtu.be/RJL-3Re8EE8

課文B：　三角形的外角定理

如圖，在課文 A 的例題一當中，要求另一個角$\angle C$的外角即$\angle 1$的度數。

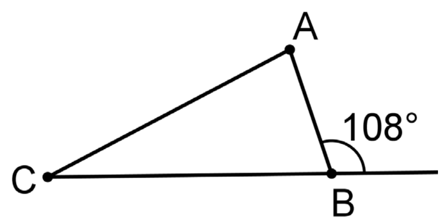


在解這題時用了「$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$」以及「$\angle 1+\angle C=180^\circ$」所以$\angle 1=\angle A+\angle B=85^\circ+33^\circ=118^\circ$，與$\angle C$的外角一樣！發現「三角形任一外角等於另外兩個不相鄰內角之和」。我們稱為「外角定理」。

例題一：$\triangle ABC$中，若$\angle B$的外角為108°，$\angle A=3\angle C$，則$\angle A=$？

◎解題思維：

首先，畫出符合題意的圖形，再標上題目的條件，



利用外角定理，$108^\circ=\angle A+\angle C$，以及另外一個條件，$\angle A=3\angle C$。

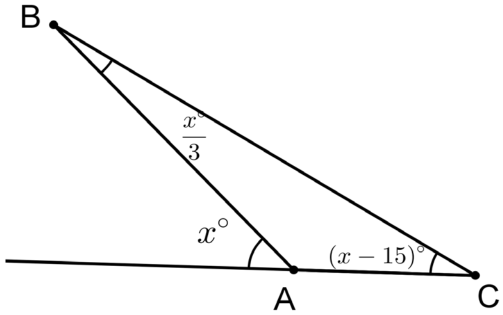
可得 $108^\circ=3\angle C+\angle C$

$\boxed{解}$：已知$\angle A+\angle C=108^\circ$，又$\angle A=3\angle C$

所以$3\angle C+\angle C=108^\circ$，$\angle C=27^\circ$

$\angle A=3\angle C=3\times 27^\circ=81^\circ$

例題二：如下圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的外角為 x°，$\angle B=\dfrac{x^\circ}{3}$，$\angle C=(x-15)^\circ$，則 $\angle A=$？



◎**解題思維**：利用外角定理列式：$x=\dfrac{x}{3}+(x-15)$

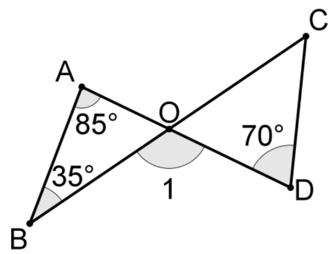
$\boxed{\text{解}}$：已知 $x=\dfrac{x}{3}+(x-15)$ $\boxed{\text{去括號}}$，$x=\dfrac{x}{3}+x-15$ $\boxed{\text{整理}}$

$x=\dfrac{4x}{3}-15$ $\boxed{\text{移項到等號右邊變-x，-15 移項到等號左邊變 15}}$

$15=\dfrac{4x}{3}-x$ $\boxed{\text{整理}}$

$15=\dfrac{x}{3}$，$x=15\times3=45$，所以 $\angle A=180^\circ-45^\circ=135^\circ$。

例題三：如圖，$\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 O 點，$\angle A=85^\circ$，$\angle B=35^\circ$，$\angle D=70^\circ$，求 $\angle 1=$？$\angle C=$？



◎**解題思維**：利用「外角定理」

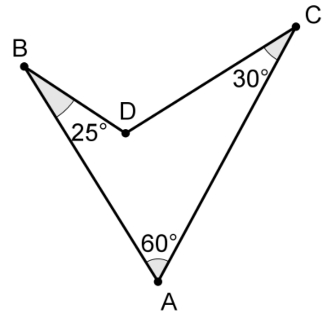
$\boxed{\text{解}}$：$\triangle AOB$ 中，$\angle 1=\angle A+\angle B=120^\circ$

$\triangle COD$ 中，$120^\circ=\angle C+\angle D$

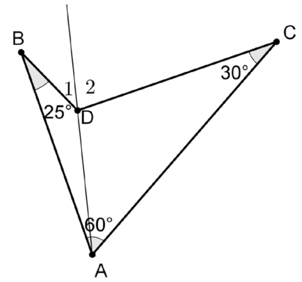
$\angle C=120^\circ-70^\circ=50^\circ$ 。

例題四：如右圖，∠A=60°，∠ABD=25°，

∠DCA=30°，求∠CDB=？



◎**解題思維：**畫出$\overline{AD}$，再利用外角定理。



$\boxed{解}$：$\triangle ABD$ 中，$\angle 1=\angle ABD+\angle BAD$。

$\triangle ADC$ 中，$\angle 2=\angle DAC+\angle DCA$。

$\angle CDB=\angle 1+\angle 2=\angle ABD+\angle BAD+\angle DAC+\angle DCA$。

$=\angle ABD+\angle BAC+\angle DCA$

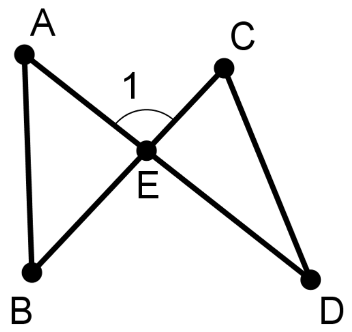
$=25°+60°+30°=115°$

重點提問

1.根據上面的課文，請用自己的話解釋什麼是「外角定理」。

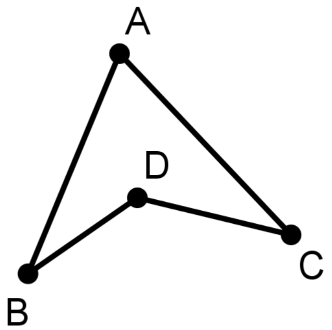
2.請根據上面例題三的算法，利用「外角定理」證明下圖中

$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$。



3.請根據上面例題四的算法，利用「外角定理」證明下圖中

$\angle CDB=\angle A+\angle ABD+\angle DCA$



4.下圖為五芒星形，請利用「外角定理」，將∠1、∠2 填入空格中完成算式。

∠B+∠D=____________

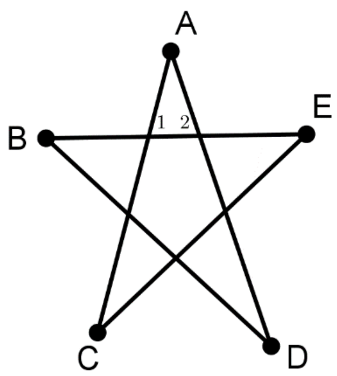
∠C+∠E=____________

∠A+∠B+∠C+∠D+∠E

=∠A+(∠B+∠D)+(∠C+∠E)

=∠A+_________+_________

=_________度



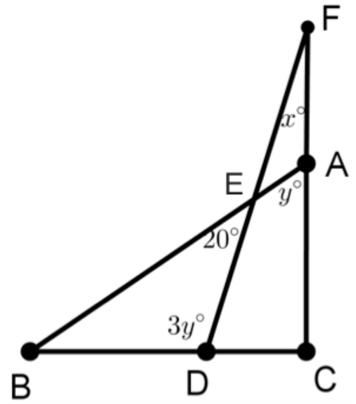
• **隨堂練習：**

1.$\triangle ABC$ 中，$\angle A=45^{\circ}$，$\angle B=30^{\circ}$，求 $\angle C$ 的外角度數為何？

2.$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$ 外角為 135°，$\angle B=2\angle C$，則 $\angle C=$？

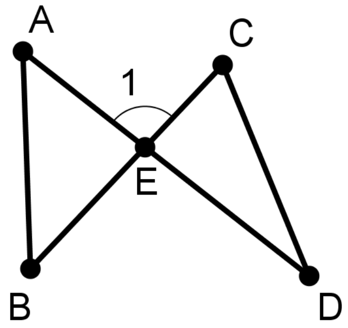
3.$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$ 外角為 $3x^{\circ}$，$\angle B=x^{\circ}$，$\angle C=(x+40)^{\circ}$，則 $\angle B=$？

4.$\triangle ABC$ 中，$\angle BCF=90^{\circ}$，其餘各角角度如下圖所示，求 x、y 值為何？（提示：y 是 $\triangle AEF$ 的外角，$3y$ 是 $\triangle CDF$ 的外角）

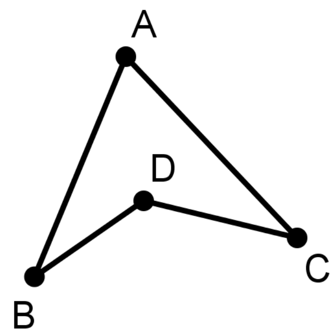


5.如圖，$\overline{AD}$與$\overline{BC}$交於E點，$\angle A=45°$，$\angle C=50°$，$\angle D=30°$，求$\angle 1=$？

$\angle$B=？



6.如右圖，$\angle A=54°$，$\angle B=36°$，$\angle C=30°$，求$\angle CDB=$？

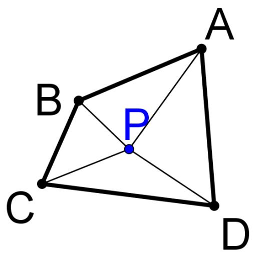


還是不太懂，請看下面影片

課文	例題一~二	更多例題
https://youtu.be/iMQoQQT2aVU	https://youtu.be/WLR5NwvHs-0	https://youtu.be/wckDfYLpZlE

課文C：　多邊形的內角和、外角和

在課文 A 當中介紹了三角形的內角和，接下來要來討論到多邊形的內角和！如下表，先在四邊形內部一點 P 點，並與四邊形的頂點連線，而四邊形的內角和，並沒有包含圍繞 P 點的角，所以要將它們扣除。已知圍繞 P 點的角會形成周角=360°。

圖形	分割的三角形個數	內角和
	4	(4 個三角形的內角和)−(1 個周角) $=4\times180°-360°$ $=2\times180°$ $=360°$

由這樣的規則去做類推，

n 邊形內角和$=n\times180°-360°=n\times180°-2\times180°=(n-2)\times180°$

「$(n-2)\times180°$」就是 n 邊形內角和的公式，接下來試試看一些例題。

例題一：在六邊形 $ABCDEF$ 中，六個內角分別為 $2x°$、$3x°$、$3x°$、$3x°$、$3x°$、$4x°$，則這個六邊形中的最大內角是幾度？

◎**解題思維：**利用多邊內角和公式「$(n-2)\times180°$」，算出六邊形內角和。

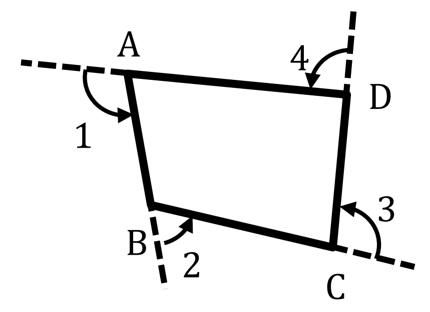
解：六邊形的內角和$=(6-2)\times180°=4\times180°=720°$，

$2x+3x+3x+3x+3x+4x=720$

$18x=720$，$x=40$

最大的內角 $=4\times40°=160°$。

在課文 A 當中除了有提到「三角形的內角和=180°」以外，還有提到「三角形的外角和=360°」，而多邊形的外角和有什麼特別之處嗎？我們利用「多邊形的內角和」來驗證多邊形的外角和。



如圖 $\angle 1+\angle DAB=180^\circ$；

$\angle 2+\angle ABC=180^\circ$；

$\angle 3+\angle BCD=180^\circ$；

$\angle 4+\angle CDA=180^\circ$。

所以四邊形外角和

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=$(4 個平角)−(四邊形的內角和)

$=720^\circ-360^\circ=360^\circ$

會不會任意的多邊形外角和都是 360° 呢？根據前面的討論，n 邊形的 n 對內外角總和就會是 $n\times180^\circ$。

那麼 n 邊形的外角和=(n 個平角)－(n 邊形的內角和)

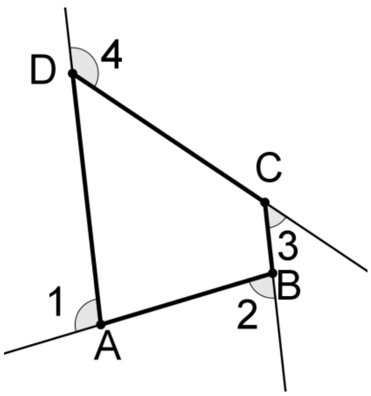
$=n\times180^\circ-(n-2)\times180^\circ=n\times180^\circ-(n\times180^\circ-2\times180^\circ)$

$=n\times180^\circ-n\times180^\circ+2\times180^\circ=360^\circ$

n 可以是任意的值，也就是不管是什麼多邊形，其外角和都是 360°。

那就來練習看看例題！

例題二：如右圖，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 為四邊形 $ABCD$ 的一組外角。若 $\angle 1=100^\circ$，$\angle 2=80^\circ$，$\angle 3=(x+30)^\circ$，$\angle 4=2x^\circ$，求 $\angle 3$、$\angle 4$。



◎**解題思維：**利用外角和定理：任意多邊形的外角和都是 360°

$\boxed{解}$：$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360°$

$100°+80°+x°+30°+2x°=360°$

整理 $3x+210=360$

移項 $3x=150$

$x=50$

$\angle 3=(50+30)°=80°$，$\angle 4=2\times 50°=100°$

例題三：若 n 邊形的外角和恰好是內角和度數的 $\frac{1}{3}$，則 $n=$？

◎**解題思維：**利用外角和定理，和 n 邊形的內角和$=(n-2)\times 180°$。

$\boxed{解}$：由題目得知：外角和=內角和$\times\frac{1}{3}$

$360°=(n-2)\times 180°\times\frac{1}{3}$

$360°=(n-2)\times 60°$

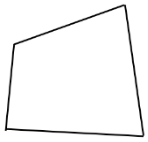
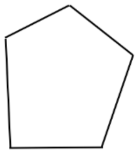
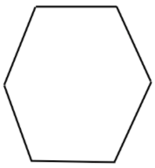
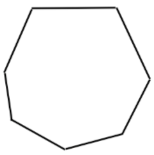
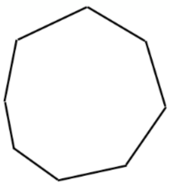
$360\div 60=(n-2)$

$(n-2)=6$，$n=8$

重點提問

1.將多邊形切割成三角形的組合有很多種切割方式，如果自多邊形的一頂點做對角線，也可以切分成數個三角形。

以下就是利用這種方式來來計算多邊形的內角和，請完成下表：

邊數	圖形	三角形個數	內角和
4	 四邊形	2	2×180°=360°
5	 五邊形		
6	 六邊形		
7	 七邊形		
8	 八邊形		
n	n 邊形		

2.根據上面的課文及提問一，n 邊形內角和的公式算法為何？

並利用這個公式計算二十二邊形的內角和。

3.根據上面的課文，n 邊形外角和為多少？請解釋如何得到這個結果。

•隨堂練習：

1.在五邊形 *ABCDEF* 中，五個內角的連比為 1：3：4：4：6，則這個五邊形中的最大內角是幾度？

2. 在六邊形 *ABCDEF* 中，$4\angle B=2\angle C=2\angle E=\angle F$，且 $\angle A=\angle D=90^{\circ}$，則這個六邊形中的最大內角是幾度？

3.$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 為四邊形 $ABCD$ 的一組外角。

若 $\angle 1=75^\circ$，$\angle 2=85^\circ$，$\angle 3=(x+20)^\circ$，$\angle 4=2x^\circ$，求 $\angle 3$、$\angle 4$。

4.若 n 邊形的外角和恰好是內角和度數的 $\dfrac{1}{4}$，則 $n=$？

還是不太懂，請看下面影片

課文(1)	課文(2)	例題一、三
https://youtu.be/zjhn74Jk81A	https://youtu.be/4xDuu4hj6ww	https://youtu.be/iVTVUXxaqIU

課文D：　正多邊形的內角與外角

在第 2 章介紹多邊形時，有介紹一個特別的多邊形，就是每一個邊皆等長且每一個內角也相等的多邊形稱為正多邊形。正多邊形也是一種多邊形，所以它的內角和算法當然也是$(n-2)\times180^\circ$，也因為正多邊形的每一個內角都相等，所以就可以算出任一正多邊形的內角度數。

如果有一個正 n 邊形，那它的內角和算法為$(n-2)\times180^\circ$，而它有 n 個一樣角度的內角，所以每一個內角度數就是$\dfrac{(n-2)\times180^\circ}{n}$。

正多邊形的每一個內角都相等，那麼每一個外角當然也會相等；而且知道任何正多邊形的外角和都是 360°，所以就可以算出任一正多邊形的外角度數。

如果有一個正 n 邊形，那它的外角和都是 360°，而它有 n 個一樣角度的外角，所以每一個外角度數就是$\dfrac{360^\circ}{n}$。

舉幾個例題來試試看！

例題一：求正六邊形的一個內角與外角的度數。

◎解題思維：

內角：先求出正六邊形的內角和，再除以角數 6 就可以了！

外角：利用外角和定理，再除以 6

$\boxed{解}$：正六邊形的內角和 $=(6-2)\times180^\circ=4\times180=720^\circ$

所以一個正六邊形的內角$=\dfrac{720^\circ}{6}=120^\circ$。

以正六邊形的外角和是 360°，一個正六邊形的外角$=\dfrac{360^\circ}{6}=60^\circ$。

例題二：若某一個正 n 邊形的外角度數為 20°，則 n=？

◎**解題思維：**利用外角和定理。

$\boxed{解}$：

正 n 邊形的外角度數為 20°，所以列式成：$\frac{360^{\circ}}{n}=20^{\circ}$，因此 $n=\frac{360^{\circ}}{20^{\circ}}=18$。

例題三：若某一正 n 邊形的內角度數為 144°，則 n=？

◎**解題思維：**利用內角和公式。

解：正 n 邊形的每一個內角度數就是 $\frac{(n-2)\times180^{\circ}}{n}$，

所以就可以列式：$\frac{(n-2)\times180}{n}=144$

同×n　$(n-2)\times180=144n$

$180n-360=144n$

移項　$180n-144n=360$

$36n=360$

$n=10$

另解：正 n 邊形的一個外角 $=180^{\circ}-144^{\circ}=36^{\circ}$。

正 n 邊形的每一個外角就是 $\frac{360^{\circ}}{n}$，可以列式成：$\frac{360^{\circ}}{n}=36^{\circ}$，

因此 $n=\frac{360^{\circ}}{36^{\circ}}=10$。

說說看，你會比較喜歡哪種方法呢？為什麼？

例題四：若某一正 n 邊形的一個外角度數是內角度數的 $\frac{1}{5}$，則 n=？

◎**解題思維：**利用一個內角＋一個外角＝180°。

$\boxed{解}$：已知外角度數是內角度數的 $\frac{1}{5}$，設外角=x°，內角=$5x$°。

$x+5x=180$，$6x=180$，$x=30$

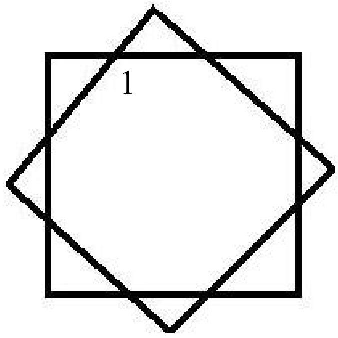
外角度數為 30°，可以列式成：$\frac{360°}{n}=30°$，

$n=\frac{360°}{30°}=12$。

重點提問

1.根據上面的課文，請說明如何計算正多邊形的外角度數及內角度數，並舉一個正多邊形實際計算。

2.下圖圖形為一種八芒星的圖形，由正中間的正八邊形跟周邊八個等腰三角形所組成，請問圖中的∠1=？



• **隨堂練習：**

1.求正十五邊形的一個內角與外角的度數。

2.若某一個正 n 邊形的外角度數為 18°，則 $n=$？

3.若某一正 n 邊形的內角度數為 140°，則 $n=$？

4.若某一正 n 邊形的一個外角度數是內角度數的 $\frac{1}{4}$，則 $n=$？

還是不太懂，請看下面影片

https://youtu.be/vmbaAZ2JVds